Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

Existencia de soluciones estacionarias para un fluido comprensible isotérmico

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional

AUTOR

José Kenyn RODRIGUEZ BRICEÑO

ASESOR

Dr. Yony Raúl SANTARIA LEUYACC

Lima, Perú

2020

Referencia bibliográfica

Rodriguez, J. (2020). *Existencia de soluciones estacionarias para un fluido comprensible isotérmico*. Tesis para optar el grado de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional. Unidad de Posgrado, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

Hoja de metadatos complementarios

Código ORCID del autor	https://orcid.org/0000-0002-4755-2510
DNI o pasaporte del autor	DNI:42651649
Código ORCID del asesor	https://orcid.org/0000-0001-8279-7460
DNI o pasaporte del asesor	DNI:42159219
Grupo de investigación	“—“
Agencia financiadora	“—“
Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación	Facultad de Ciencias Matemáticas-Ciudad Universitaria-UNMSM, Av. República de Venezuela 3400, Lima-Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	3 años (2017-2019)
Disciplinas OCDE	Matemáticas aplicadas http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las, 17:00 horas del día jueves trece de febrero del dos mil veinte, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis Presidido por el Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar e integrado por los siguientes miembros: Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas (Jurado Evaluador Externo); Mg. Willy David Barahona Martínez (Jurado Informante) y; el Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada «EXISTENCIA DE SOLUCIONES ESTACIONARIAS PARA UN FLUIDO COMPRESIBLE ISOTÉRMICO» presentada por el Bachiller José Kenyn Rodriguez Briceño para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller José Kenyn Rodriguez Briceño respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller José Kenyn Rodriguez Briceño aprobado con el calificativo de EXCELENTE (19)

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional** al Bachiller **José Kenyn Rodriguez Briceño**.

Siendo las 17:55 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas
Miembro

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Presidente

Mg. Willy David Barashona Martínez
Miembro

Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc
Miembro Asesor

FICHA CATALOGRÁFICA

JOSE KENYN RODRIGUEZ BRICEÑO

Existencia de soluciones estacionarias para un fluido compresible isotérmico, (Lima) 2020.

XIV, 124 p., 29,7 cm (UNMSM, Maestría en Matemática Aplicada con mención en Matemáticahttps://es.overleaf.com/project/5f34bd8a35478800017c6ad9 Computacional, 2020).

Tesis de Maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.

1. Matemática Aplicada, UNMSM/FCM II.

DEDICATORIA

A mi madre Elena Briceño López por ser el pilar más importante en mi vida y educación ayudándome en todo lo que necesito y teniendo siempre su apoyo en los buenos y no tan buenos momentos para terminar esta exigente carrera. Por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada por su gran amor.

A mi hermana Cinthia por ser un ejemplo de una hermana mayor y de la cual aprendí a valorar los estudios, por brindarme sus consejos, apoyo y por demostrarme que con esfuerzo y sacrificio se consiguen las cosas más importantes en la vida.

Finalmente, a los compañeros, aquellos que marcaron cada etapa de nuestro camino universitario y que me ayudaron en asesorías y dudas presentadas en la elaboración de la tesis.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar me gustaría agradecer a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por haberme acogido en sus aulas y darme la oportunidad de estudiar hasta convertirme en un profesional de alto nivel.

Agradecer a Sotelo Pejerrey Alfredo por su visión crítica en las cosas cotidianas de la vida, por su rectitud en su profesión como docente y persona, por sus consejos que me ayudaron a formarme como persona y profesional y por último a mi asesor Yony Raúl Santaria Leuyacc por su constante motivación y orientación en la elaboración de este trabajo.

Son muchas las personas que han formado parte de mi vida profesional a las que me encantaría agradecerles su amistad, consejos, ánimos y compañía en los momentos más difíciles de mi vida. Algunas están aquí conmigo otras en mis recuerdos y en mi corazón, sin importar donde estén quiero darles las gracias por formar parte de mí, por todo lo que me han brindado y por todos sus buenos deseos.

Lista de Notaciones

Notación	**Definición**
B	Volumen de control.
ρ	Masa específica.
u, v	Campo de velocidades para algún flujo.
S	Superficie externa que delimita un volumen.
n	Vector normal unitario orientado hacia afuera.
m	Masa.
$\mathrm{div}, \nabla \cdot (\cdot)$	Divergente.
$\mathrm{grad}, \nabla(\cdot)$	Gradiente.
Δ	Operador Laplaciano.
$\mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla(\mathrm{div})$	Operador de Lamé.
$\mathrm{rot}, \nabla \times \cdot$	Rotacional.
F	Fuerza actuando sobre un elemento de área.
σ	Tensor de tensiones.
$\frac{D}{Dt}$	Derivada total o convectiva.
p	Presión.
τ	Matriz de desvio de istropía.
μ, ν	Viscocidades dinámica y cinemática respectivamente.
$\mathfrak{R}$	Número de Reynolds.
Fr	Número de Froude.
ω	Vorticidad.
Γ	Circulación de un vector velocidad a lo largo de una región.
e, E_{TOTAL}	Energia total.
T	Temperatura.
q, Q	Flujo de calor.
h_0	Entalpía.

Notación	**Definición**
$(X, \\| \cdot \\|_X)$	Espacio normado X con norma $\\| \cdot \\|_X$.
$(L^P(\Omega), \\| \cdot \\|_{L^P(\Omega)})$	Espacio lineal de funciones reales f definidas en Ω tales que $\|f\|^P$ es Lebesgue integrable en Ω para $1 \leqslant P < \infty$ con norma $\\|f\\|_{L^P(\Omega)} = \left(\int_\Omega \|f\|^P dx\right)$.
$(L^\infty(\Omega), \\| \cdot \\|_{L^\infty(\Omega)})$	Conjunto de funciones reales medibles f en Ω para el cual $essSup\{\|f(x)\| : x \in \Omega\} \equiv \text{ínf}\{k > 0; \mu(\{x \in \Omega : \|f(x)\| > k\}) = 0\} < \infty$ con norma $\\|f\\|_{L^\infty(\Omega)} = essSup\{\|f(x)\| : x \in \Omega\}$
$\alpha = (\alpha_1 \cdots, \alpha_n)$	Multi-índice cuyas coordenadas son enteras no negativas.
$D^\alpha = \frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$	Derivada distribucional de índice α.
$C^k(\Omega)$	Espacio de las funciones $k-$diferncíables con derivadas D^α continuas para todo $\|\alpha\| \leqslant k$.
$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$	Espacio de funciones infinitamente diferenciables.
$C_0^\infty(\Omega), D(\Omega)$	Conjunto de $f \in C^\infty(\Omega)$ para el cual $suppf \subset \Omega$. Si Ω es acotado. Ha este espacio también se le conoce como espacio de funciones de prueba o funciones test.
$(W^{m,p}(\Omega), \\| \cdot \\|_{W^{m,p}(\Omega)})$	Subespacio lineal de los elementos f en $L^p(\Omega)$ para el cual las derivadas parciales generales $D^\alpha f$ existen para toda $\|\alpha\| \leqslant m$ y pertenecen a $L^p(\Omega)$ con la norma $\\|f\\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{\|\alpha\| \leqslant m} \\|D^\alpha f\\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p}$.
$W_0^{m,P}(\Omega)$	Clausura del conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ en la norma $W^{m,p}(\Omega)$.
$W_M^{m,p}(\Omega)$	Espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ con medida nula, definidos por $\left\{\psi : \psi \in W^{m,p}(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega \psi dx = 0\right\}$.

Índice general

RESUMEN

EXISTENCIA DE SOLUCIONES ESTACIONARIAS PARA UN FLUIDO COMPRESIBLE ISOTÉRMICO

José Kenyn Rodriguez Briceño

En el presente trabajo se explora la existencia de soluciones estacionarias para una ecuación de Navier–Stokes–3D en un fluido compresible e isotérmico a partir del método de aproximaciones sucesivas, siguiendo los resultados mostrados en [1]. Además se presenta un método de elementos finitos para el caso barotrópico de los gases.

Palabras clave: Navier-Stokes, ecuación estacionaria, gases,aproximaciones sucesivas.

ABSTRACT

EXISTENCE OF STATIONARY SOLUTIONS FOR ISOTHERMAL COMPRESSIBLE FLUID

José Kenyn Rodriguez Briceño

In the present work we explore the existence of stationary solutions for a Navier–Stokes–3D equation in a compressible and isothermal flow from the method of successive approximations, following the results shown in [1]. In addition, a finite element method is presented for the barotropic case of gases.

Keywords: Navier-Stokes, stationary equation, gases, successive approximations.

CAPÍTULO I

Introducción

Uno de los problemas más interesantes y de mayor dificultad en el estudio teórico-matemático de las ecuaciones en derivadas parciales que surgen de la mecánica de fluidos es sobre las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido compresible (por ejemplo los *gases*). Una de las principales dificultades que se presenta en el flujo de este tipo de fluidos, es su naturaleza genuinamente *no lineal* regido por ecuaciones de tipo mixtas hiperbólicas–parabólicas.

En la literatura sobre las ecuaciones de Navier-Stokes, existen varios resultados para el caso de un fluido *incompresible*, es decir, un fluido donde el volumen ocupado por una cantidad de partículas no varía con el tiempo. Esta condición se traduce en la siguiente propiedad para el campo de velocidades

$$\nabla \cdot u = 0,$$

dicha restricción supone una ventaja importante: la presión (comúnmente denotada por la letra p) *desaparece* en la formulación variacional del problema, por lo que deja de ser una incógnita. Así, una vez resuelto el sistema (y, por tanto, conocido u), la presión es recuperada como consecuencia del Lema de De Rham (véase [15, 45, 57] entre otros).

Sin embargo, no ocurrirá lo mismo para el caso *compresible*. No sólo no desaparece p en la formulación variacional, sino que la ecuación de momentos y la ley de conservación de la masa estarán acopladas.

Debido a la complejidad de este tipo de EDP's, estudiaremos el comportamiento de un fluido compresible isotérmico, como puede ser un gas, o una masa de aire. Al ser gas se considera ecuaciones relacionadas a la termodinámica lo que permiten considerar esta característica física en nuestro problema. Además, se considerará una condición de viscosidad en un ambiente tridimensional, procurando probar la existencia de soluciones para el caso estacionario, es decir, las fuerzas físicas involucradas independen del tiempo.

Este hecho permite aproximar la dinámica del comportamiento de dichos sistemas para el caso parabólico e hiperbólico. Una aplicación visible del presente estudio, es el comportamiento de una masa de aire en un ambiente *cerrado*, así se podrá conseguir aproximaciones del campo de velocidades de dicha masa, como de su densidad, a partir de las fuerzas externas participantes.

Las ecuaciones que rigen el movimiento estacionario de un fluido compresible, isotermo y viscoso en un dominio acotado fijado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se pueden escribir como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{r} -\nabla \cdot (\mu(\nabla v + \nabla v^t) + \lambda(\nabla \cdot v)Id) + \nabla p + \rho v \cdot \nabla v = \rho f \text{ en } \Omega, \\ \nabla \cdot (\rho v) = 0 \;\; \text{ en } \Omega. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Donde ρ es la densidad, v la velocidad, f son las fuerzas externas, p es la presión, cuya expresión viene dada por la ecuación de estado para un fluido isotermo:

$$p = K\rho,$$

con $K > 0$ constante y μ, λ siendo los llamados coeficientes de Lamé (que supondremos constantes).

Es importante notar que al estudiar este fenómeno físico, se requiere ciertas condiciones adicionales respecto al flujo cinético y másico (cf. [2, 49, 45]), así, se considerará

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_\Omega \rho(x)dx = \bar{\rho} \cdot |\Omega|, \tag{1.2}$$

donde $\bar{\rho} > 0$ es una constante fijada, que representará la positividad de la masa total y la condición de adherencia sobre la frontera respectivamente (estamos suponiendo por ejemplo una frontera sólida, sin entrada ni salida de fluido).

Así, el objetivo principal será probar la existencia de soluciones estacionarias para el problema (3.41) considerando (3.42) siguiendo los diferentes métodos usados por M. Padula [1], lo que se traduce en el Teorema 3.9.

CAPÍTULO II

Preliminares

Las ecuaciones de Navier-Stokes fueron modeladas inicialmente por M. Navier [38] en 1827 y por S. D. Poisson [39] en 1831, envolviendo consideraciones de fuerzas intermoleculares. Más tarde, las mismas ecuaciones fueron planteadas sin el uso de estas hipótesis por B. de Saint Venant [40] en 1843 y por G. G. Stokes [41] en 1945. Sus derivaciones fueron estudiadas a partir de las hipótesis de que las tensiones normales y de cizallamiento son funciones lineales de la tasa de deformación, en conformidad con la más antigua ley de viscosidad de Newton. La trascendencia del estudio de estas ecuaciones se refleja al ser consideradas como uno de los problemas del millón (por Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts) al estudiar la buena colocación del sistema en una región tridimensional, incompresible. Respecto al estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles, la bibliografía es abundante, (por ejemplo [32, 33, 34, 35, 36]) tomando como principal referencia el libro de P. L. Lions [15] entre otros.

A continuación, mostramos una breve descripción de las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles encontradas en la literatura:

1. M. Padula [1], en 1985, en su artículo *Existence and Uniqueness for Viscous Steady Compressible Motions* muestra la existencia de soluciones débiles globales para flujos compresibles viscosos inestables bidimensionales de un gas isotérmico ideal, sea cual sea el tamaño de los datos. Esto se logra mediante un acoplamiento adecuado del método de Hopf con técnicas estándar en espacios de Orlicz.

2. Posteriormente, A. Valli [2, 3, 4] muestra la existencia de una solución estacionaria para las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos compresibles, bajo el supuesto de que el campo de fuerzas externas es pequeño en un sentido ade-

cuado. La prueba se basa en el resultado de la existencia de soluciones para un problema linealizado, seguido de un argumento de punto fijo.

3. Mas tarde, R. Bruce Kellogg y B. Liu [6] consideran un sistema de Navier-Stokes viscoso, compresible y de estado estacionario linealizado, formulando un método de elementos finitos. La unicidad de las soluciones, así como la estabilidad del sistema se desprenden de un teorema para una formulación abstracta. Está comprobado que cuando los subespacios de velocidad y presión satisfacen la condición *minimax* asociada con el sistema de Stokes (incompresible), el método de elementos finitos se puede resolver de manera única. Además, los autores muestran una estimación del error para la aproximación numérica.

Es así que el estudio de las ecuaciones respecto a la dinámica de los fluidos precisa de una comprensión tanto a nivel matemático como físico, por lo qué dividiremos el capítulo en tres secciones, siendo la primera de estas dedicada a explorar los diferentes aspectos físicos que envuelven a las ecuaciones de Navier-Stokes, mientras que las dos restantes serán destinadas a mostrar diversos resultados que involucran un ambiente netamente matemático.

2.1. Interpretación física de las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p_r + f_r \Delta \frac{a}{b} a^b \tag{2.1}$$

En la ecuación (2.1) Landau and Lifschitz [53], y Childress [69] En lo que sigue en este capítulo, intentamos hacer una breve presentación de cada término en las ecuaciones de Navier–Stokes, para conocer cómo y por qué se introducen en la mecánica de fluidos. Un tratado clásico de hidrodinámica desde el punto de vista de físico es el libro de Landau y Lifschitz [53], y se puede hacer una rápida introducción encontrado en las notas de la conferencia de Feynman [70]. El punto de vista de los matemáticos se puede encontrar en el tratado clásico de Batchelor [49], o para un punto moderno de vista en el libro de Childress [69].

2.1.1. Marcos de referencia

La teoría de fluidos se basa en una hipótesis del continuo [49] que establece que el comportamiento macroscópico de un fluido es el mismo que si el fluido estuviera perfectamente continuo: la densidad, la presión, la temperatura y la velocidad se consideran bien definidas en puntos infinitamente pequeños y se supone que varían continuamente de un punto a otro.

Desde las memorias fundamentales de Euler [71], se describen las leyes del fluido mecánica aplicada a las parcelas de fluidos, volúmenes muy pequeños δV de fluidos que contienen muchas moléculas pero cuyo tamaño es ïnfinitesimalçon respecto al escala macroscópica.Entonces las propiedades físicas de las parcelas se definen como promedios de las cantidades asociadas que varían continuamente: por ejemplo, la la temperatura $\theta_{\delta V}$ de la parcela viene dada por $\theta_{\delta V} = \dfrac{1}{|\delta V|} \int_{\delta V} \theta(t;x)$ donde θ es la temperatura definida en el punto x y en el tiempo t.

Entonces hay dos representaciones del movimiento del fluido y del asociado Cantidades fisicas. En el marco de referencia euleriano, el marco de referencia es fijo mientras el fluido se mueve. Por tanto, las cantidades se miden en una posición x unido al marco fijo (a menudo se habla del "marco de laboratorio"). la velocidad $u(t,x)$ es la velocidad en el tiempo t de la parcela de fluido que ocupa el posición x en ese mismo instante t. En el marco de referencia de Lagrange, el marco de referencia es el estado inicial del fluido. Las cantidades se adjuntan a los paquetes a medida que se mueven.

Más precisamente, si $X_{x_0}(t)$ es la posición de la parcela en el momento t cuya posición en el momento 0 era x_0, y si Q es alguna cantidad adjunta a las parcelas,tenemos dos descripciones de la distribución de los valores tomados por Q en el momento t: el valor $Q(t, x)$ tomado en el momento t para la parcela que se encuentra en este tiempo en la posición x , y $Q_{x_0}(t)$ el valor tomado en el momento t para la parcela que estaba ubicado en el tiempo 0 en la posición x_0. En particular, el campo de velocidad $u(t, x)$ describe las velocidades de las parcelas a medida que se mueven:$\frac{d}{dt}X_{x_0}(t) = u(t; X_{x_0})$. Esto nos da el vínculo entre las variaciones de $Q_{x_0}(t)$ y los de $Q(t, x)$: de la regla de la cadena para la diferenciación, obtenemos.

$$\frac{d}{dt}Q_{x_0}(t) = \frac{\partial}{\partial t}Q(x;t)_{|x=X_{x_0}} + \sum_{i=1}^{3} x_i = Q(x;t)_{|x=X_{x_0}} \frac{d}{dt}X_{x_0,i(t)}$$

La cantidad $\frac{d}{dt}Q_{x_0}(t)$ se llama la derivada material de Q y se diseña como $\frac{D}{Dt}Q$. Así hemos obtenido la siguiente fórmula:

Derivada Material

$$\frac{D}{Dt}Q = \frac{\partial}{\partial t}Q(x;t) + \sum_{i=1}^{3} x_i = Q(x;t) \tag{2.2}$$

2.1.2. El teorema de la convección

Si consideramos un volumen V_0 en el tiempo 0 lleno de paquetes de fluidos, y definimos V_t el volumen llenado por las parcelas a medida que se movían, tenemos $V_t = \{y \in R^3 / y = X_x(t), \text{para algún } x \in V_0\}$. El elemento de volumen dy de V_t se da por $J(t, x)dx$, donde J es el jacobiano de la transformada $x \longmapsto X_x(t)$, de donde obtenemos.

$$J = \left| \det \left(\frac{\partial}{\partial x_i} y_j\right)_{1 \leqslant i \;; j \leqslant 3} \right|$$

Definimos $\mathcal{J}(t,x) = \left|\det\left(\frac{\partial}{\partial x_i}y_j\right)_{1\leqslant i;j\leqslant 3}\right|$ luego

$$\partial\frac{\partial}{\partial x_i}y_j = \partial\frac{\partial}{\partial x_i}\partial_t y_j = \partial\frac{\partial}{\partial x_i}u_j(t;y) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}u_j(t;y)\frac{\partial}{\partial x_i}y_k$$

y por lo tanto.

$$\begin{aligned}
\partial_t\mathcal{J} &= \det\left(\partial_t\frac{\partial}{\partial x}y_1;\frac{\partial}{\partial x}y_2;\frac{\partial}{\partial x}y_3\right) + \det(\frac{\partial}{\partial x}y_1;\partial_t\frac{\partial}{\partial x}y_2;\frac{\partial}{\partial x}y_3) + \det(\frac{\partial}{\partial x}y_1;\frac{\partial}{\partial x}y_2;\partial_t\frac{\partial}{\partial x}y_3) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}u_1(t;y)\det(\frac{\partial}{\partial x}y_k;\frac{\partial}{\partial x}y_2;\frac{\partial}{\partial x}y_3) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}u_1(t;y)det(\frac{\partial}{\partial x}y_1;\frac{\partial}{\partial x}y_k;\frac{\partial}{\partial x}y_3) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial y_k}u_1(t;y)\det(\frac{\partial}{\partial x}y_1;\frac{\partial}{\partial x}y_2;\frac{\partial}{\partial x}y_k) \\
&= \operatorname{div}(u(t;y))\mathcal{J}
\end{aligned}$$

para que, desde $J(0;x) = 1$,

$$J(t;x) = e^{\left(\int_1^3 \operatorname{div} u(s;X_x(s))\, ds\right)}$$

(2.3)

Por lo tanto, hemos visto que la divergencia de u es la cantidad que gobierna la deflación o la inflación del volumen de V_t.

Ahora, si $f(t,x)$ es un campo dependiente del tiempo sobre R^3, podemos definir $F(t) = \int_{V_t} f(t,y)dy$. Tenemos

$$F(t) = \int_{V_0} f(t;X_x(t)J(t;x)dx$$

Usamos el hecho de que $\partial_t f(t,X_x(t))= \dfrac{D}{D_t}f(t,y)$ y $\partial_t J(t;x) = \operatorname{div}u(t,y)J(t,x)$ y $J(t,x)dx = dy$ para obtener el teorema de la convección:

$$\frac{d}{dt}\int_{V_t} f(t,y)dy = \int_{V_t}\frac{D}{Dt}f(t,y) + f(t,y)\operatorname{div}\ u(t,y)dy \tag{2.4}$$

Esto es un caso especial del teorema del tansporte de Reynold

2.1.3. Conservación de masa

Aplicamos el teorema de conveción a la masa m de las parcelas incluidas en el volumen V_t. Si $\rho(t,y)\ dy$. Cuando las parcelas se mueven, su masa es conservada, concluimos que $\frac{d}{dt}m = 0$. Para que esta identidad sea válida para cualquier volumen incial V_0, esto da la ecuación de conservación de masa:

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho\, u = 0 \tag{2.5}$$

Cuando el fluído es incomprensible, la densidad de una parcela dada no puede cambiar, por lo que $\frac{D}{Dt}\rho = 0$, de esto deducimos (en ausencia de vacíos o espacios de densidad nula)

$$\mathrm{div}\ u = 0 \tag{2.6}$$

Esto es consistente con la ecuación (2.1.2): si div $u = 0$, entonces el volumen ocupado por un parcel nunca varía. Para un fluído incompresible, vemos que $\partial_t \rho = -u.\nabla\rho$. Si el fluído es homogeneo, la densidad no depende de la posición, de ello, llegamos a que $\frac{d}{dt}\rho(t) = 0$; la densidad es constante en tiempo y espacio

$$\rho = Constante \tag{2.7}$$

2.1.4. Segunda ley de Newton

Aplicamos la segunda ley de Newton a una parcela del fluído en movimiento. El momento de la parecela a un momento t está dado por $M = \int_{V_t} \rho(t,y)\, u(t,y)\ dy$ si $f(t,y)$ es la densidad de fuerza a un tiempo t y posición y, la fuerza aplicada a la parcela es $F = \int_{V_t} f(t,y)\ dy$. La segunda ley de Newton de la mecánica está dada por:

$$\frac{d}{dt}M = F$$

El teorema de convección resulta en:

$$\int_{V_t} \frac{D}{Dt}(\rho u) + \rho\, u\, \mathrm{div}\ u - f\ dy = 0$$

De la ecuación (2.5) tenemos $\frac{D}{Dt}\rho + \rho \,\text{div}\, u = 0$, tomando un volumen infinitesimal V_0 se llega a:

$$\rho \, \frac{D}{Dt} \, u = f \tag{2.8}$$

Esto también puede ser escrito así:

$$\rho \left(\partial_t u + (u.\nabla)u \right) = f \tag{2.9}$$

Donde $u.\nabla = \Sigma_{i=1}^{3} u_i \, \partial_i$. Por supuesto, falta describir la fuerza de densidad f. Este es el resultado de varias fuerzas: Fuerzas exteriores (La gravedad, por ejemplo) así como fuerzas internas. En las próximas secciones, serán considerados dos tipos importantes de fuerzas internas: La fuerza inducida por presión y la fuerza inducida por fricción.

Este balance del momento es clásico en mecánica de fluídos desde las épocas de Euler; sin embargo, esto ha sido recientemente refutado por H. Brenner, quien argumenta que se debe distinguir entre la velocidad de transporte masivo u_m (Euleriano) y la velocidad de partícula u_v (Lagrangiano); de ello tendríamos en lugar de (2.2) la ecuación $\frac{D}{Dt}Q = \partial_t Q(x,t) + \Sigma_{i=1}^{3} u_{m,i}(t,x)\partial_i Q(x,t)$ la ecuación de continuidad (2.5) se convertiría en $\frac{D}{Dt}\rho + \rho$ div $u_m = 0$ y el balance de momentos (2.8) tomaría la forma de $\rho\frac{D}{Dt}u_v = f$. Una vez ahí, una ley constitutiva que describa la diferencia $u_v - u_m$ es necesaria. Brenner propuso la siguiente ley:

$$u_v - u_m = K\nabla\rho$$

Luego, las ecuaciones deberán ser modificadas en caso de fluídos compresibles con altos gradientes de densidad, mientras que para fluídos incompresibles homogeneos, las ecuaciones clásicas de mecánica de fluídos seguirán siendo fálidas. Un estudio del modelo de Brenner ha sido llevado al cabo por Feireisl y Vasseur, quienes mostraron que las soluciones débiles de este modelo son más regulares que las soluciones débiles para las ecuaciones clásicas de Navier-Stokes para fluídos altamente compresibles.

2.1.5. Presión

Cuando un fluído entra en contacto con un cuerpo, ejerce sobre la superficie del cuerpo una fuerza que es normal a la superficie y es llamada la presión. La presión es una cantidad escalar que no depende de la direcció de la normal. Un valor positivo de la presión da una fuerza de compresión que apunta hacia el interior del cuerpo, por lo que es opuesta a la normal. La presión interna (O presión estática) es definida de manera análoga. Las parcelas del fluído ocupan un volumen δV; la fuerza ejercida sobre el parcel inducida por la presión es entonces $F_p = -\int_{\partial\delta V} p\nu \, d\sigma$. Esto puede ser reescrito con la fórmula de Otrogradksi en la ecuación siguiente:

$$F_p = -\int_V \nabla p \, dx$$

Lo cual da la densidad por la fuerza de presión:

$$f_P = -\nabla p \tag{2.10}$$

2.1.6. Deformación

Los fluídos no son cuerpos rígidos, por ende, su movimiento implica deformación. Esas deformaciones pueden ser ilustrada a través del tensor deformación. Si las velocidades y sus derivadas son lo suficientemente pequeñas, podemos estimar dos puntos inciales x_0 y y_0 como la distancia que las parcelas van a evolucionar. En efecto, si $x(t) = X_{x_0}(t)$ y $y(t) = X_{y_0}(t)$ tenemos:

$$\|x - y\|^2 = \|x_0 - y_0\|^2 + 2\int_0^t \big(x(s) - y(s)\big).\Big(u\big(s, x(s)\big) - u\big(s, y(s)\big)\Big)ds$$

Y eliminando los términos de mayor orden:

$$\|x - y\|^2 \approx \|x_0 - y_0\|^2 + 2\int_0^t (x(s) - y(s)).Du(s, x(s))(x(s) - y(s)) \, ds$$

Donde Du está dado por:

$$Du = (\partial_j u_i(s, x))_{1 \leqslant i; j \leqslant 3} \tag{2.11}$$

El tensor de deformación de Cauchy se define como la parte simétrica de Du:

$$\epsilon = \frac{1}{2}\Big(Du + (Du)^T\Big) \tag{2.12}$$

La parte antisimétrica tiene cero contribución a la integral, de ello llegamos:

$$\|x - y\|^2 \approx \|x_0 - y_0\|^2 + 2\int_0^t (x(s) - y(s)).\epsilon(s, x(s))(x(s) - y(s))\, ds$$

El tensor de deformación de cauchy a un tiempo t y posición x es la matriz ϵ dada por:

$$\epsilon_{i,j} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \text{ para } 1 \leqslant i; j \leqslant 3 \tag{2.13}$$

Si tomamos un desplazamiento infinitesimal de y tenemos:

$$\frac{D}{Dt}y = u(t, y) = u(t, x) + \frac{1}{2}(Du - (Du)^T)(y - x) + O((y - x)^2)$$

$u(t, x)$ no depende de y, corresponde a un desplazamiento infinitesimal; la expresión $\frac{1}{2}(Du - (Du)^T)$ no contribuye al distorsionamiento de las distancias, esto corresponde a una rotación infinitesila. ϵ corresponde a la deformación infinitesimal.

2.1.7. Tensión

Cuando un fluído es viscoso, reacciona como un cuerpo elástico que resiste deformaciones. . Aplicando la teoría de elasticidad al fluído en movimiento, uno puede ver que las deformaciones inducen fuerzas. Si δV es una pequeña parcela, la deformación del parcel induce una fuerza exterior al borde de δ; esta fuerza F_visc está dada por el tensor $\mathbb{T}$, conocido como el tensor de tensión viscosa:

$$F_{visc} = \int_{\partial\delta V} \mathbb{T}\nu \, d\sigma$$

O equivalentemente:

$$F_{visc,i} = \int_{\partial} \delta V \Sigma_{j=1}^3 T_{1,j}\nu_j \, d\sigma$$

La fórmula de Ostrogradski nos da la densidad de fuerza asociada a la tensión: Cuando el flujo de velocidad y sus derivadas son lo suficientemente pequeñas, Stokes muestra que la relación entre el tensor de tensión y el tensor de deformación es lineal. En caso de un fluído isotrópico (para que la relación lineal sea la misma para cualquier punto) encontramos que f_{visc} es la suma de las segundas derivadas de u. Pero, debido a la isotropía del fluído, un cambio de referencia a través de la rotación no debería alterar la relación entre la fuerza y la velocidad. Esto resulta en que f_visc viene determinada solo por dos coeficientes de viscosidad.

$$f_{visc} = \mu\delta u + \lambda\nabla(div\ u) \tag{2.14}$$

Ecuación (2.14) corresponde a una relación muy simple entre el tensor ϵ y el tensor $\mathbb{T}$:

$$\mathbb{T} = 2\mu\epsilon + \eta tr(\epsilon)\mathbb{I}_3 \tag{2.15}$$

Con $tr(\epsilon) = \epsilon_{1,1} + \epsilon_{2,2} + \epsilon_{3,3}$ y $\lambda = \mu + \eta$ se llama "viscosidad dinámica"del fluído y η el volumen de viscosidad del fluído. Fluídos para los cuales se cumple (2.16) y se llaman. Todos los gases y la mayoría de líquidos con fórmula molecular simple y bajo peso molecular como el agua, el benceno y alcohol etílico son líquidos newtonianos. En contraste, soluciones de polímeeros son no-newtonianas.

Stokes ha expresado la noción de presión interna en una principio muy general que permite, luego de cien años, a Reiner y Rivlin, describir una clase más generalizada de fluídos. Para un fluído Stokesiano, el tensor tensión $\mathbb{T}$ todavía se encuentra relacionado con el tensor deformación de manera homogenea e isotrópica, pero la relación ya no es lineal. Siguiendo Serrín y Aris, un líquido Stokesiano satisface las siguiente cuantro condiciones:

1. El tensor de tensión $\mathbb{T}$ es una función continua del tensor deformación ϵ y del estado termodinámico local, pero independiente de otras propiedades cinéticas
2. $\mathbb{T}$ no depende explícitamente de x (fluído homogeneo)
3. El fluído es isotrópico
4. Cuando no hay deformación ($\epsilon = 0$) el fluído es hidrostático ($\mathbb{T} = 0$)

Luego, usando la simetría inducida por el principio de objetividad material o de marco de referencia (Ver Noll y Truesdell), el cual dice "las leyes contitutitvas que gobiernan las condiciones internas de un sistema físico y las interacciones entre sus partes no deben de depender del punto de referencia. Serrin mostró que el tensor de tensión viscosa puede expresarse como:

$$\mathbb{T} = \alpha \mathbb{I}_3 + \beta \epsilon + \gamma \epsilon^2 \tag{2.16}$$

Donde $\alpha(0,0,0) = 0$ y $\alpha = \alpha(\Theta, \Phi, \Psi)$, $\beta = \beta(\Theta, \Phi, \Psi)$, $\gamma = \gamma(\Theta, \Phi, \Psi)$ son funciones de los tres invariantes de la matriz simétrica $\epsilon : Siloseigenvaloresde\epsilon son\lambda_1, \lambda_2$ y λ_3, luego $\Theta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(\epsilon)$, $\Phi = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$ y $\Phi = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = det(\epsilon)$

2.1.8. Las ecuaciones de hidrodinámica

Consideremos un fluído newtoniano isotrópico. Tenemos:

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho \text{div } u = 0$$

Y

$$\rho \frac{D}{Dt} u = f$$

La densidad de fuerza f es una superposición de fuerzas externas f_{ext} y fuerzas internas f_{int} una puede ser la fuerza de gravidad, o la fuerza Coriolis. En las fuerzas internas, tenemos las fuerzas debido a la presión:

$$f_P = -\nabla p$$

Y la fuerza debido a la viscosidad:

$$f_{visc} = \mu \Delta u + \lambda \nabla (\text{div } u)$$

En ausencia de otras fuerzas internas, obtenemos las ecuaciones de hidrodinámica:

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho \text{div } u = 0 \tag{2.17}$$

$$\rho \frac{D}{Dt} u = -\nabla p + \mu \Delta u \lambda \delta(\text{div } u) + f_{ext} \tag{2.18}$$

Estas ecuaciones son en total cuatro ecuaciones escalares con cinco incógnitas escalares (u_1, u_2, u_3, ρ y p). La quinta ecuación depende de la naturaleza del fluído: Es una ecuación de estado termodinámica que se relaciona la presión, la densidad y la temperatura (uno usualmente asume que la temperatura es constante)

Observaciones:

1. En caso de un fluído incompresible la ecuación de estado es muy sencila:

$$\rho = constante$$

2. Cuando no hay viscosidad uno habla de fluídos ideales: $\lambda = \mu = 0$

3. La traza de $\mathbb{T}$ está dada por $(2\mu + 3\eta)$div u; esto resulta en agregar a la gradiente de presión termodinámica otra gradiente de presión; el total de presión mecánica está dada por $p - (2\mu + 3\eta)\text{div } u$. El coeficiente $(2\mu + 3\eta)$ se llama viscosidad aparente. Un caso importante de la hipótesis de Stokes donde el tensor $\mathbb{T}$ no tiene rastro: $2\mu + 3\eta = 0$.

A veces uno considera otras fuerzas internas, como las que están relacionadas como la conductividad eléctrica o termal del fluído. Uno, entonces tiene que agregar nuevas fuerzas internas a las ecuaciones que dependan de la velocidad e influencien a la velocidad. Uno entonces sale del dominio de la hidrodinámica y entra al dominio de la magentohidrodinámica (Una disciplina fundada en 1970 por el ganador del premio Nobel Alfvén) o ecuaciones de Boussinesq que relacionan la velocidad con la temperatura

2.1.9. Las ecuaciones de Navier-Stokes

En esta sección consideramos el caso de un fluído newtoniano, isotrópico, homogeneo e incompresible. Las ecuaciones hidrodinámicas (2.17) y (2.18) luego se reducen a las ecuaciones de Navier-Stokes. Dado que ρ es constante, es costumbre dividir las ecuaciones por ρ y reemplazar la densidad de fuerza f_{ext} por una densidad reducida $f_r = \frac{1}{\rho} f_{ext}$, la presión p por la presión reducida $p_r = \frac{1}{\rho} p$ (el cual se llama presión cinética), y la viscosidad dinámica μ por la viscosidad cinética $\nu = \frac{1}{p}\mu$. Luego, llegamos a esto:

$$\partial_t u + (u.\nabla)u = -\nabla p_r + \nu \Delta u + f_r \tag{2.19}$$

$$\mathrm{div}\,\breve{;} = 0 \tag{2.20}$$

ν es positivo para un fluído viscoso. En caso de un fluído ideal (ν=0) obtenemos las ecuaciones de euler:

$$\partial_t u + (u.\nabla)u = -\nabla p_r + f_r \tag{2.21}$$

$$\mathrm{div}\ u = 0 \tag{2.22}$$

2.1.10. Vorticidad

Las ecuaciones de Navier-Stokes pueden reescribirse para remarcar el papel de la vorticidad. Comenzamos con la identidad:

$$(curl\ u) \wedge u + \nabla \frac{|u|^2}{2} = (u.\nabla)u$$

Con esto podemos reescribir las ecuaciones de Navier-Stokes como:

$$\partial_t u + w \wedge u = -\nabla Q_r + \nu \Delta u + f_r \tag{2.23}$$

$$\mathrm{div}\ u = 0 \tag{2.24}$$

Donde $w = curl\ u$ es la vorticidad del flujo y Q_r la presión total (reducida). La presión total $Q = \rho Q_r$ es la suma de la presión hidrostática ρ y la presión dinámica $q = \rho\frac{1}{2}|u|^2$. Tomando el rotacional de las ecuaciones de Navier-Stokes nos da las siguientes ecuaciones para w:

$$\partial_t w + (u.\nabla)w = \nu(\Delta)u + (W.\nabla)u + curl\ f_r \tag{2.25}$$

Nos encontramos nuevamente con el fenómeno de difusión (Inducido por δw, la advención por el vector de campo u (descrito por el término $(u.\nabla)w$) y tenemos un tercer término $(w.\nabla)u$ que corresponde con las fuerzas de deformación. Este término es mu importante en mecánica de fluídos 3D. Cuando el fluído es plano $u(t, x_1, x_2, x_3) = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), 0)$, la fuerza de deformación se desvanece: $(w.\nabla)u = 0$

2.1.11. Términos de frontera

Para completar el sistema de Navier-Stokes es necesario especificar las condiciones de la frontera del dominio del fluído. En el presente trabajo vamos a considerar un problema sin límites (el fluído llena el espacio entero). Sin embargo, en esta sección vamos a elaborar en el problema de valor de frontera. Cuando el fluído ocupa solo un dominio Ω el problema de condiciones de frontera se plantea. El dominio puede variar con el tiempo. Un problema particular es el problema sin frontera de dominio: El dominio de Ω evoluciona a través de una ecuación en derivadas parciales, las cuales describen la evolución de la curvatura del límite a través de la acción del tensor deformación del fluído.

Para un dominio rígido, uno debe prescribir el comportamiento en la frontera y el infinito (Cuando el dominio no tiene frontera). La condición más usada es la condición de no deslizamiento que dice que, a un punto dado de la frontera, la parte normal de la velocidad debe desvanecerse ($u.\nu = 0$) y que la parte tangencial de la velocidad debe igualar a la velocidad del punto sólido de la frontera (si la frontera se está moviendo). Si los puntos de frontera no se mueven, la condición de no deslizamiento es la condición homogenea de Dirichlet: $u_{|\partial\Omega}$. Para ecuaciones de Euler en un dominio fijado, la condición de no deslizamiento es reemplazada por la condición de impermeabilidad (que expresa que no hay fluído que atraviece la frontera) $u.\nu = 0$ sobre $\partial\Omega$ La condición de no deslizamiento fue introducida por Stokes en 1849 y ha sido verificada experimentalmente. Sin embargo, hay algunos casos en los que algo de deslizamiento debe ser considerado, por ejemplo los microfluídos que trabaja con cantidades muy pequeñas de fluídos (Entre un atolitro [$10^{-18}l.$] y un nanolitro [10^{-9}l.] donde las propiedades macroscópicas de los fluídos ya no son válidas. Para estos fluídos, la condición de deslizamiento fue introducida por Navier en 1822 y ha sido experimentalmente validada. La condición de deslizamiento de Navier estipula que la parte normal de la velocidad del fluído se desvanece en la frontera, pero que la parte tangencial es gobernada por el tensor de deformación: si $Q_{||}$ es la proyección $Q_{||}(g) = g - \langle g|\nu\rangle\nu$ a la tangente al plano en la frontera, $Q_{||}u$ es proporcional a $Q_{||}(\epsilon.\nu)$

2.1.12. Expansión

Consideremos el problema Clay del milenio para las ecuaciones de Navier-Stokes en absencia de fuerzas externas. Como podemos ver, un clásico resultado de las ecuaciones de Navier-Stokes muestra que problema del valor inicial de Cauchy tendrá una solución suave mientras que la velocidad esté restringida.. Luego, para tener una descomposición en la regularidad, la norma L^∞ debe expandirse. Pero esta expansión no tiene significado físico; por varias razones, uno tiene que dejar las ecuaciones mucho antes de que la expansión ocurra. Por ejemplo:

1. la incompresibilidad del fluído es una aproximación que es válida solo si la velocidad del fluído es mucho menor a la velocidad del sonido

2. la naturaleza newtoniana del fluído fue derivada bajo la hipótesis de velocidades pequeñas y pequeñas derivadas de velocidades

3. cuando las velocidades son demasiado importantes, las mecánicas clásicas deberán ser corregidas en mecánicas relativistas

Luego, el problema de la expansión es escencialmente un problema matemático, no uno físico; sin embargo, se espera que entendiendo el mecanismo que llega a la expansión o blooqueo, se podrán dar ideas de como funciona el mecanismo que llega a estados fluídos o turbulentes del fluído

2.1.13. Turbulencia

Flujos suaves son llamados ”laminares”, cuando son desordenados se llaman ”turbulentes”. Para flujos turbulentes es bastante difícil encontrar una descripción para todos las parcelas del fluído pues el número de grados de libertad es muy importante. Considerando el trabajo de Reynolds (1984) y Taylor (1921), uno trata solo de describir la evolución del flujo a gran escala y discutir el comportamiento del flujo a pequeña escala como una corrección disipativa de las ecuaciones a grandes escalas. Esta separación entre componentes a gran escala de los de pequeña escala se sustenta en varias observaciones físicas. Los componentes a gran escala son sensibles a la geometría de la frontera y a la naturaleza de las fuerzas externas que actúan en el fluído, mientras que los componentes a pequeña escala pueden ser analizados de manera más universal. Para separar los componentes de gran escala de los componentes de pequeña escala uno usa un proceso de promediación que da el valor medio $\overline{u}$ de la velocidad u.

$$\partial_t \overline{u} + \overline{u}\nabla\overline{u} = \nu\Delta\overline{u} - \nabla\overline{p} + \overline{f} + \text{div } R \tag{2.26}$$

(Junto a div $u = 0$ y $\overline{u}_{|t=0} = \overline{u_0}$) donde la tensión de Reynold R está dada por

$$R = \overline{u} \otimes \overline{u} - \overline{u \otimes u} \tag{2.27}$$

El valor medio $\overline{u \otimes u}$ no depende del valor medio $\overline{u}$, esas ecuaciones no están cerradas. El problema es, entonces, dar un valor que satisfaga el modelo de tensión de Reynolds. La teoría de Kolmogorov (1941) da un modelo para $u - \overline{u}$ como un campo aleatorio que obedezca algunas leyes universales debido a la homogeneidad (loca) e isotropía de las fluctuacione. Si esta teoría ha sido comprobada experimentalmente está todavía lejos de ser comprendida completamente y es el centro de un muy activo campo de investigación.

2.2. Herramientas del análisis funcional y espacios de Sobolev

En este capítulo presentamos las herramientas matemáticas preliminares básicas para estudiar las ecuaciones de Navier-Stokes incluidos los resultados del análisis funcional lineal y no lineal, así como la teoría de los espacios funcionales. Presentamos en particular algunos de los más utilizados teoremas como los de inmersión y desigualdades diferenciales, para esto usaremos diferentes referencias como [46, 58, 60, 61, 62, 63, 64] entre otros.

2.2.1. Teoremas del análisis funcional

Teoremas del análisis funcional lineal, el núcleo de esta subsección es el lema de Lax-Milgran que indicamos para espacios separables de Hilbert así como su demostración utilizando el método de Galerkin. Este método será muy útil en nuestras consideraciones posteriores, en las pruebas de la existencia de soluciones de problemas lineales y no lineales.

Teorema 2.3. *En un espacio reflexivo de Banach, cada bola cerrada es débilmente compacta.*

Se puede encontrar una prueba del teorema anterior por ejemplo en [60], para espacios separables en [61].

En particular sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio B reflexivo de Banach tal que $\|x_n\|_B \leqslant M$ por algún $M > 0$, entonces existe una subsucesión $\{x_\mu\}$ de la sucesión $\{x_n\}$ y un elemento x en B con $\|x\|_B \leqslant M$ tal que $\{x_\mu\}$ converge débilmente a x en B; es decir para toda L funcional y continua en B,

$$\lim_{\mu\to\infty} L(x_\mu) = L(x).$$

Teorema 2.4 (Lema Lax-Milgran para espacios separables)**.** *Sea H un espacio de Hilbert separable con una norma $\|\cdot\|$, $L \in H'$ un funcional lineal en H, $a(u, v)$ una* *forma bilineal y continua en $H \times H$, coerciva, es decir tal que para algunos $\alpha > 0$ y para todo $u \in H$*

$$a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|^2$$

entonces existe un único elemento $u \in H$, tal que

$$a(u,v) = L(v);\ \forall v \in H \tag{2.28}$$

Prueba. Usamos el método de Galerkin, el cual consiste en probar la existencia de elementos $u_m \in H_m$ tal que

$$a(u_m, v) = L(v); \forall v \in H_m \tag{2.29}$$

donde H_m son subespacios finito dimensionales de H tales que $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \cdots \subset H_m \subset \cdots$ y $\bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$ es un subconjunto denso de H. Luego al pasar al límite con m obtenemos (2.28).

Sea $w_1, w_2, w_3, \cdots$ son bases de H y $H_m = \text{span}\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$ $m = 1, 2, 3, \cdots$

1. Mostraremos que para cada entero positivo m existe un $u_m \in H_m$ tal que (2.29) se cumple. Sea

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} \xi_k w_k$$

entonces (2.29) es equivalente al sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k a(w_k, w_\ell) = L(w_\ell),\ \ell = 1, 2, \cdots, m$$

este sistema tiene una solución única $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)$ por cada lado derecho si y solo si la matriz $\{a(w_k, w_\ell)\}_{k,\ell \leqslant m}$ es no singular. Mostraremos que el sistema homogéneo

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k a(w_k, w_\ell) = 0,\ \ell = 1, 2, \cdots, m$$

tiene una única solución por ξ_k y agregamos las ecuaciones para obtener

$$\sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \xi_\ell \xi_k a(w_k, w_\ell) = a\left(\sum_{k=1}^{m} \xi_k w_k, \sum_{\ell=1}^{m} \xi_k w_k, \sum_{\ell=1}^{m} \xi_\ell \xi_\ell \right) = a(u_m, u_m) = 0$$

De la coerciva de la forma $a(\cdot,\cdot)$ obtenemos $u_m = 0$ como los vectores $w_1, w_2, \cdots, w_m$ son linealmente independientes, concluimos que $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_m = 0$ de ahí la matriz $\{a(w_k, w_\ell)\}_{k,\ell \leqslant m}$ es no singular y para cada número entero positivo m existe una solución aproximada $u_m \in H_m$.

2. convergencia de la sucesión tenemos

$$\alpha \|u_m\|^2 \leqslant a(u_m, u_m) = L(u_m) \leqslant \|L\|_{H'} \|u_m\|$$

de donde $\|u_m\| \leqslant \dfrac{1}{\alpha}\|L\|_{H'}$

para cada entero positivo m del Teorema 2.3 se deduce que existe una subsucesión $\{u_k\}$ de la sucesión de soluciones aproximadas $\{u_m\}$ y un elemento $u \in H$ tal que $u_\mu \to u$ débilmente en H. Para $\mu \geqslant j$ tenemos

$$a(u_\mu, v) = L(v); \forall v \in H_j \subset H_\mu$$

Así que

$$\lim_{\mu \to \infty} a(u_\mu, v) = a(u, v) = L(v) \text{ para } v \in \bigcup_{j=1}^{\infty} H_j$$

como $\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j$ es un subconjunto denso de H, concluimos de la continuidad de $a(\cdot,\cdot)$ y $L(\cdot)$ que (2.28) se mantiene para todo $v \in H$.

3. Unicidad de u. Supongamos que tenemos dos elementos diferentes u_1 y u_2 tal que $a(u_1, v) = L(v)$ y $a(u_2, v) = L(v)$, para toda $v \in H$ por lo tanto $a(u_1 - u_2, v)$ y tomando $v = u_1 - u_2$ obtenemos

$$0 = a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geqslant \alpha \|u_1 - u_2\|^2$$

de aquí $u_1 = u_2$, llegamos a una contradicción que demuestra la unicidad.

■

Observación 2.5. Si L es un funcional lineal y continuo en el espacio de Banach B, escribiremos $L \in B'$, el espacio dual de B y utilizamos la notación $L(v) = \langle L, v \rangle$ para $v \in B$.

Como corolario obtenemos los siguientes

Teorema 2.6 (Teorema de Riesz-Fréchet para espacios separables)**.** *Sea H un espacio de Hilbert separable con producto escalar $(\cdot,\cdot)$ y norma $\|\cdot\|$ y sea $L \in H'$ un funcional lineal y continuo en H entonces existe un único elemento $u \in H$ tal que*

$$(u, v) = L(v) \text{ para cada } v \in H \text{ y } \|u\| = \|L\|_{H'}$$

Observación 2.7. En los dos teoremas anteriores la separabilidad del espacio H no es esencial, para las pruebas ver [58].

Teoremas de punto fijo

los teoremas del punto fijo son la herramienta básica que utilizaremos, comenzamos con el principio de contracción de Banach el único teorema de esta subsección que garantiza la singularidad del punto fijo la existencia de un punto fijo único es una condición fuerte, sin embargo y en la mayoría de los casos haremos uso de los teoremas de Schauder o Leray-schauder. Ambos siguen del Teorema del punto fijo de Brower.

Teorema 2.8 (Principio de contracción de Banach)**.** *Sea T un operador definido en el espacio X de Banach con valores en X. Suponga que T es una contracción, es decir, que un número α, $0 \leqslant \alpha < 1$ existe tal que para todos los pares de elementos $u, v \in X$ tenemos*

$$\|Tu - Tv\|_X \leqslant \alpha \|u - v\|_X$$

entonces existe un único elemento $u \in X$ tal que $Tu = u$.

Prueba. Sea u_0 un elemento arbitrario del espacio X. Entonces la sucesión $u_0, u_1, u_2, \cdots$ donde para $n \geqslant 1$, u_n se define recursivamente por $u_n = Tu_{n-1}$, converge en X hasta el punto fijo del operador T. ■

Teorema 2.9 (Brouwer)**.** *Sea K un conjunto no vacío convexo y compacto en $\mathbb{R}^n$, si $T : K \to K$ es un mapeo continuo, luego tiene al menos un punto fijo, es decir existe $u_0 \in K$ tal que $T(u_0) = u_0$.*

Prueba. Para la prueba ver [61, 62]. ■

Teorema 2.10 (Schauder)**.** *Sea K un conjunto cerrado no vacío, acotado y convexo en un espacio X de Banach. Sea T un operador completamente continuo (es decir, el operador es compacto y continuo) definido en K tal que*

$$T(K) \subset K$$

entonces existe al menos un elemento $u_0 \in K$ tal que $T(u_0) = u_0$.

Observación 2.11. Si $X = \mathbb{R}^n$, entonces el Teorema de Schauder se reduce al Teorema de Brouwer.

Prueba. La cerradura del conjunto $T(K)$ es compacto. para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $x_1, x_2, \cdots, x_{\Gamma(n)}$ en $T(K)$ tal que

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant \Gamma n} \|x - x_i\|_X < \varepsilon = \frac{1}{n} \text{ para cada } x \in T(K)$$

■

Sea X_n el espacio generado por el conjunto $\{x_1, x_2, \cdots, x_{\Gamma(n)}\}$, es decir, el conjunto de todos los puntos de la forma $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{\Gamma(n)} x_{\Gamma(n)}$, donde $\lambda_1, \cdots, \lambda_{\Gamma(n)}$ son números reales arbitrarios. Escribiremos $X_n = \text{span}\{x_1, \cdots, x_{\Gamma(n)}\}$. Sea $K_n = X_n \cap K$. El conjunto K_n es convexo, acotado, cerrado, no vacío y se encuentra en un subespacio dimensional finito de X, definimos el mapa $T_n : K \to K_n$ por

$$T_n(X) = F_{\frac{1}{n}} T(X)$$

donde

$$F_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^{\Gamma(n)} m_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^{\Gamma(n)} m_i(x)}$$

$$m_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_i\|_X & ; \quad \text{cuando } \|x - x_i\|_X < \varepsilon \\ 0 & ; \quad \text{cuando } \|x - x_i\|_X \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

Tenemos $F_\varepsilon(K) \subset K_n$. El mapa T_n es continuo, ya que las funciones m_i son continuas para un arbitrario $x \in K$ tenemos

$$\begin{aligned} \|T_x - T_n x\|_X &= \left\| \frac{\sum m_i(Tx)Tx - \sum m_i(Tx)x_i}{\sum m_i(Tx)} \right\|_X \\ &\leqslant \frac{\sum m_i(Tx)\|Tx - x_i\|_X}{\sum m_i(Tx)} < \frac{1}{n} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Por lo tanto, hemos aproximado de manera uniforme el operador compacto T mediante un operador de dimensión finita T_n como $T_n : K_n \to K_n$ satisface la hipótesis del Teorema del punto fijo de Brouwer, existe $\widetilde{x}_n$ tal que $T_n\widetilde{x}_n = \widetilde{x}_n$, como T es compacto, la sucesión $\{\widetilde{x}_n\}$ tiene una subsucesión convergente $\widetilde{x}_{n_k} \to \widetilde{x}$, de la continuidad de T se sigue que $T_{\widetilde{x}_{n_k}} \to T\widetilde{x}$, de (2.30) concluimos que $T_{\widetilde{x}_{n_k}} - T_{n_k}\widetilde{x}_{n_k} \to 0$, por lo tanto $T\widetilde{x} = \widetilde{x}$, y T tiene un punto fijo en K.

Teorema 2.12 (Leray-Schauder). *Sea T un mapeo completamente continuo de un espacio X de Banach en si mismo y supongamos que existe una constante M tal que*

$$\|x\|_X < M \tag{2.31}$$

para toda $x \in X$ y $\sigma \in [0;1]$ satisfaciendo $x = \sigma Tx$. Entonces T tiene un punto fijo.

Prueba. (cf. [58]) podemos asumir sin pérdida de generalidad que $M = 1$, definimos el mapa T^* por

$$T^*x = \begin{cases} Tx & ; \text{ si } \|Tx\|_X \leqslant 1 \\ \dfrac{Tx}{\|T\|_X} & ; \text{ si } \|Tx\|_X > 1 \end{cases}$$

Entonces, T^* es un mapeo continuo de la bola unitaria cerrada $B(1) = \{x \in X : \|x\|_X \leqslant 1\}$ en si misma, como el conjunto $TB(1)$ es precompacto, lo mismo es cierto para $T^*B(1)$, del teorema del punto fijo de Schauder se decue que T tiene un punto fijo x. Mostraremos que x es un punto fijo de T de hecho, si $\|Tx\|_X > 1$, entonces $x = T^*X = \sigma Tx$ con $\sigma = \dfrac{1}{\|Tx\|_X}$ y $\|x\|_X = \|T^*x\|_X = 1$, que contradice (2.31). ■

Teorema 2.13 (Kakutani-Fan-Glicksberg). *Sea $S \subset X$ un conjunto, no vacío, compacto y convexo, donde X es un espacio vectorial topológico de Hausdorsff localmente convexo y permite que el multifuncional $\varphi : S \to 2^S$ tiene valores convexos no vacíos y gráfico cerrado, entonces el conjunto del punto fijo de φ (i.e. $\{x \in S : x \in \varphi(x)\}$ es no vacío y compacto).*

2.13.1. Espacios de Sobolev y distribuciones

Asumimos que Ω es un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$, n es un entero positivo.

Definición 2.14. Se denotará por $L^P(\Omega)$, $1 \leqslant P < \infty$, al espacio lineal de funciones de valores reales f definidas en Ω tales que $|f|^P$ es integrable en Ω con respecto a la medida de Lebesgue. El funcional

$$f \to \|f\|_{L^P(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^P dx\right)^{1/P}$$

es una norma en $L^P(\Omega)$ (siempre que identifiquemos funciones que son iguales entre si casi siempre en Ω en el sentido de la medida de Lebesgue).

El espacio $L^P(\Omega)$ es un espacio de Banach. Para $P = 2$ es un espacio de Hilbert con un producto escalar $(f, g) = \displaystyle\int_\Omega fgdx$.

Teorema 2.15. *(cf. [47]) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L^P(\Omega)$, es decir*

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\|_{L^P(\Omega)} = 0$$

entonces existe $f \in L^P(\Omega)$ y una subsucesión $\{f_v\}$ de la sucesión tal que

$$\lim_{v\to\infty} \|f_v - f\|_{L^P(\Omega)} = 0,$$

y $f_v(x) \to f(x)$ para casi todas las $x \in \Omega$ además existe $h \in L^P(\Omega)$, con $h(x) \geqslant 0$, c.s. en Ω tal que $|f_v(x)| \leqslant h(x)$ para cada $x \in \Omega$.

Definición 2.16. Se denotará por $L^\infty(\Omega)$ al conjunto de funciones reales medibles f en Ω para el cual

$$essSup\{|f(x)| : x \in \Omega\} \equiv \inf\{k > 0; \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > k\}) = 0\} < \infty$$

el espacio lineal $L^\infty(\Omega)$ con norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = essSup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$$

es un espacio de Banach.

Decimos que una función real f en Ω es localmente integrable en Ω, y se escribe $f \in L^P_{Loc}(\Omega)$, si para cada compacto $K \subset \Omega$, f es integrable en K.

Similarmente, definimos espacios $L^P_{Loc}(\Omega)$, para $1 < p < \infty$, para f definido en Ω definimos el soporte de f como el cierre del conjunto $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ y denotamos esto por $suppf$.

Sea $\alpha = (\alpha_1 \cdots, \alpha_n)$ un multi-índice cuyas coordenadas son enteras no negativas. Escribimos $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, y

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

decimos que $f \in C^k(\Omega)$ (resp. $f \in C^k(\overline{\Omega})$) si existen derivadas parciales $D^\alpha f$ para toda α con $|\alpha| \leqslant k$ que son continuas en Ω (respectivamente $\overline{\Omega}$).

Además $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$

por $C_0^\infty(\Omega)$ denotamos el conjunto de $f \in C^\infty(\Omega)$ para el cual $suppf \subset \Omega$. Si Ω es acotado, $suppf$ es un subconjunto compacto de Ω.

Lema 2.17. *(cf. [46, 63]) El conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^P(\Omega)$ para $1 \leqslant p < \infty$.*

Lema 2.18. *(Du Bois-Reymond, cf. [46, 64]) Sea $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$ y $\displaystyle\int_\Omega f\varphi dx = 0$ para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces $f = 0$ casi en todas partes en Ω.*

Definición 2.19 (Derivada generalizada)**.** Sea $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ un multiíndice cuyas coordenadas son enteros no negativos llamamos a una función $f^\alpha \in L^1(\Omega)$ la α derivada generalizada en Ω de $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$ si para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f^\alpha \varphi dx$$

Definición 2.20 (Espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$)**.** Sea m un entero positivo $1 \leqslant p < \infty$ por $W^{m,p}(\Omega)$ denotamos un subespacio lineal de los elementos f en $L^p(\Omega)$ para el cual las derivadas parciales generales $D^\alpha f$ existen para toda $|\alpha| \leqslant m$ y pertenecen a $L^p(\Omega)$ con la norma

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \tag{2.32}$$

Lema 2.21. *(cf. [46, 63]) El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach, para $1 < p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ es reflexivo.*

Lema 2.22. *Para* $1 < P < \infty$ *cada sucesión acotada en* $W^{m,P}(\Omega)$ *contiene una subsucesión débilmente convergente.*

Definición 2.23. Por $W_0^{m,P}(\Omega)$ denotamos la clausura del conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ en la norma $W^{m,p}(\Omega)$.

Los espacios $W^{m,P}(\Omega)$ también se denotan por $W_P^m(\Omega)$.
Los espacios $W^{m,2}(\Omega)$ y $W_0^{m,2}(\Omega)$, denotados también por $H_0^m(\Omega)$, respectivamente, son espacios de Hilbert con producto escalar

$$(f,g) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega D^\alpha f D^\alpha g dx$$

Definición 2.24. Sea m un entero positivo, $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{P} + \frac{1}{q} = 1$, por $W^{-m,q}(\Omega)$ denotamos el,espacio de funcionales lineales continuos en el espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Los espacios $W^{-m,2}(\Omega)$ también se denotan por $H^{-m}(\Omega)$ ahora definiremos las distribuciones y las derivadas distribucionales, introduzcamos en el conjunto $C_0^\infty(\Omega)$. La siguiente noción de convergencia.

Definición 2.25. Decimos que una sucesión $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge a cero si existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que

1. Supp$\varphi_n \subset K$ para cada φ_n.

2. $\lim_{n\to\infty} D^\alpha \varphi_n = 0$ para cada multi-índice α, uniformemente en Ω.

Denotamos por $\mathscr{D}(\Omega)$ el conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ junto con la convergencia introducida anteriormente.

Definición 2.26. Llamamos al mapa $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ una distribución en Ω si es lineal, es decir

$$T(\alpha\varphi + \beta\varphi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$$

para toda $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y φ y $\psi \in \mathscr{D}$ y si $\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = 0$.

Para cada sucesión $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{D}(\Omega)$ que converge a cero en $\mathscr{D}(\Omega)$ denotamos por $\mathscr{D}'(\Omega)$ el conjunto de todas las distribuciones en Ω y escribimos $\langle T, \varphi \rangle$ en cambio $T(\varphi)$ para $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$, el mapa en $\mathscr{D}$ definido por

$$\langle Tf, \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi dx$$

es una distribución, por Lema 2.18 podemos identificar esto con f, y escribimos

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi dx$$

distribuciones que pueden representarse por funciones integrables localmente las llamamos regular.

Un ejemplo de una distribución que no es regular es el mapa

$$\delta(x_0) = \mathscr{D}(\Omega) \ni \varphi \to \delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) \in \mathbb{R}$$

para algún $x_0 \in \Omega$, llamado el Delta de Dirac.

Definición 2.27 (Derivada distribucional)**.** Sea $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Entonces el mapa $\dfrac{\partial T}{\partial x_i} : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, definido por $\left\langle \dfrac{\partial T}{\partial x_i}; \varphi \right\rangle = -\left\langle T; \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$ para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, es una distribución, similarmente, para un multi-índice arbitrario α definimos $D^\alpha T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

para cada $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Para $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Llamamos $D^\alpha T$ la α-ava derivada distribucional de T.

Definición 2.28. (cf. [57]) Decimos que un subconjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pertenece a la clase $C^{k,\infty}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, k un entero no negativo, si para cada punto $x_0 \in \partial\Omega$ existe una bola B centrada en x_0 y uno a uno un mapeo ψ de B sobre $D \subset \mathbb{R}^n$ tal que.

1. $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$

2. $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$

3. $\psi \in C^{k,\alpha}(B)$, $\psi^{-1} \in C^{k,\infty}(D)$

Si el límite de Ω es la suficientemente uniforme, digamos $\Omega \in C^{0,1}$, entonces los espacios de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ caracterizados como en la Definición 4, pueden describirse alternativamente como el cierre del conjunto $C^m(\overline{\Omega})$ en la norma (2.32) (véase [63]). Para esta nueva caracterización de $W^{m,p}(\Omega)$ es claro observar que $C^m(\overline{\Omega})$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$ (siempre que el borde de Ω sea lo suficientemente regular).
Otra definición equivalente a la Definición de 4 de los espacios de Sobolev, se puede dar en términos de las distribuciones, definiendo el espacio $W^{m,p}(\Omega)$ como el subespacio lineal de aquellos $f \in L^p(\Omega)$ para el cual todas las derivadas distribucionales $D^\alpha f$, $|\alpha| \leqslant m$, pertenecen a $L^p(\Omega)$, con norma (2.32).

2.28.1. Algunos teoremas de inmersiones y desigualdades

Comenzamos con tres resultados generales.

Teorema 2.29. *(cf. [58, 12]) Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ con límite de Lipschitz, es decir $\Omega \in C^{0,1}$. Entonces*

1. *Si $kp < n$, entonces el espacio $W^{k,p}(\Omega)$ esta continuamente inmerso en el espacio $L^{p^*}(\Omega)$, $p^* = np/(n-kp)$, e inmerso de forma compacta en $L^q(\Omega)$ para $q < p^*$.*

2. *Si $0 \leqslant n < k - \frac{n}{p} < n+1$, entonces el espacio $W^{k,p}(\Omega)$ esta inmerso continuamente en $C^{n,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\alpha = k - \dfrac{n}{p-n}$, e inmerso compactamente en $C^{n,\beta}(\overline{\Omega})$, para $\beta < \alpha$.*

Lema 2.30 (Una versión del Teorema de Rellich, cf. [64])**.** *Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces la inmersión de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta.*

Teorema 2.31. *)cf. [59, 65]) Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ con el límite Lipschitz, y sea u una función en $W^{n,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $1 \leqslant r, q \leqslant \infty$. Para algún multi-índice j, $0 \leqslant |j| < m$, y para algún número θ del intervalo $\dfrac{|j|}{m} \leqslant \theta \leqslant 1$, estableces*

$$\frac{1}{p} = \frac{|j|}{m} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-\theta)\frac{1}{q}$$

si $m - |j| - \dfrac{n}{r}$ *no es un entero negativo, entonces*

$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|u\|^{\theta}_{W^{m,r}(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)} \tag{2.33}$$

Si $m - |j| - \dfrac{n}{r}$ es un entero no negativo, entonces la desigualdad 2.38 se cumple para $\theta = \dfrac{|j|}{m}$. La constante C solo depende de Ω, r, q, m, J, θ.

Ahora indicaremos algunos casos especiales de los teoremas 2.29 y 2.31 útiles en los siguientes capítulos.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ como en el Teorema 10, entonces.

1. $H^1(\Omega)$ esta continuamente inmerso en $L^6(\Omega)$.

   $$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

   (véase Lema 6 a continuación)

2. $H^1(\Omega)$ esta continuamente inmerso en $L^4(\Omega)$.

3. $H^2(\Omega)$ esta continuamente inmerso en $C^{0,\frac{1}{2}}(\Omega)$, y $C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$ esta compactamente inmerso en $C(\overline{\Omega})$, en particular tenemos

   $$\sup_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)| \leqslant C\|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$ como límite Lipschitz. Entonces

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leqslant C\|u\|^{\frac{3}{4}}_{H^1(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\Omega)}$$

[cf. Desigualdad (2.37)]

Lema 2.32. *Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, n un entero positivo, $d = diam(\Omega) = sup\{|x-y| : x, y \in \Omega\}$. Entonces, para cada $u \in H^1_0(\Omega)$ y $i \in \{1, \cdots, n\}$*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{d}{\sqrt{2}}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.34}$$

Demostración. Sea $u \in C_0^\infty(\Omega)$, y fijando $i = 1$. Tenemos

$$u(x_i, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_2, \cdots, x_n)dt$$

Por la desigualdad de Schwartz.

$$\begin{aligned} |u(x_1, \cdots, x_n)| &\leqslant \int_{x_1^*}^{x_1} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t, x_2, \cdots, x_n)\right|^2 dt(x_1 - x_1^*) \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right|^2 dx_1(x_1 - x_1^*) \end{aligned}$$

donde $x_1^* = \inf\{t : u(t, x_2, \cdots, x_n) = 0,\ (t, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega\}$ integrando con respecto a x_1 obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2 dx \leqslant \frac{d^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right|^2 dx_1$$

ahora integrando con respecto a $x_2, \cdots, x_n$ obtenemos la desigualdad 2.34 para $i = 1$ y $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$. Existe una sucesión $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$, existe una sucesión $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ convergente a u en $H_0^1(\Omega)$. Probamos 2.34 para u, pasando al límite en

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \frac{d}{\sqrt{2}} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}$$

para $i \in \{1, \cdots, n\}$ ■

Corolario 2.33. sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado entonces las siguientes dos normas son equivalentes en $H_0^1(\Omega)$

$$\|u\| = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2} \quad \text{y}$$

$$|||u||| = \left(\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}$$

Lema 2.34 (Desigualdad Ladyzhenkaya en dos dimensiones)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y acotado. Entonces para toda $u \in H_0^1(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leqslant 2^{1/4} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|Du\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \tag{2.35}$$

Prueba. (cf. [66]) Demostraremos la desigualdad (2.35) para funciones uniformes con soporte compacto en Ω, y el caso general se deriva inmediatamente de la densidad de estas funciones en $H_0^1(\Omega)$. Sea $u \in C_0^\infty(\Omega)$ por conveniencia consideramos u como definida en todo el espacio $\mathbb{R}^2$ e igual a cero fuera de Ω.

Tenemos

$$u^2(x_1, x_2) = 2\int_{-\infty}^{x_k} uu_{xx}dx_k \quad \text{para } k = 1, 2$$

De esto

$$\max_{x_k} u^2(x_1, x_2) \leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty} \max_{x_2} u^2 dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \max_{x_1} u^2 dx_2 \tag{2.36}$$

y por la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \max_{x_2} u^2 dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \max u^2 dx_2 \\
&\leqslant 4\int_{\mathbb{R}^2} |uu_{x_2}|dx \int_{\mathbb{R}^2} |uu_{x_1}|dx \\
&\leqslant 2\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx \int_{\mathbb{R}^2} |D_u|^2 dx,
\end{aligned}$$

Que demuestra el lema para funciones suaves con soporte compacto en Ω. ■

Lema 2.35 (Desigualdad Ladyzhenskaya en tres dimensiones)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y acotado. Entonces para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leqslant \sqrt{2}\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \|Du\|_{L^2(\Omega)}^{3/4} \tag{2.37}$$

Prueba. [cf. [66]] Como en el Lema anterior, basta con probar la desigualdad (2.37) para funciones uniformes con soporte compacto. Sea $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Tenemos por (2.35) y (2.36)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} u^4 dx &\leqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx_1 dx_2 \int_{\mathbb{R}^2} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) dx_1 dx_2 \right) dx_3 \\
&\leqslant 2\max_{x_3} \int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx_1 dx_2 \int_{\mathbb{R}^3} |Du|^2 dx \\
&\leqslant 4\int_{\mathbb{R}^3} |uu_{x_3}|dx \int_{\mathbb{R}^3} |Du|^2 dx \\
&\leqslant 4\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |Du|^2 dx \right)^{3/2}
\end{aligned}$$

Da la desigualdad. ■

Lema 2.36 (cf. [66]). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y acotado. Entonces para toda $u \in H_0^1(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leqslant 48^{1/6}\|Du\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.38}$$

Prueba. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u \in C_0^\infty(\Omega)$ y $u \geqslant 0$, tenemos.

$$\begin{aligned}
I &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} u^6 dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^2} u^3u^3 dx_2dx_3\right)dx_1\\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \max_{x_2} u^3 dx_2\right)dx_1\\
&\leqslant 9\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u^2ux_2|dx_2dx_3\int_{\mathbb{R}^2}|u^2ux_3|dx_2dx_3\right)dx_1\\
&\leqslant 9\int_{\mathbb{R}^1}\left\{\int_{\mathbb{R}^2}u^4dx_2dx_3\left(\int_{\mathbb{R}^2}u^2x_2dx_2dx_3\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}u_{x_3}^2dx_2dx_3\right)^{1/2}\right\}dx_1
\end{aligned}$$

Ahora usamos la desigualdad de Schwarz y procedemos de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
I &\leqslant 9\max_{x_1}\int_{\mathbb{R}^2}u^4dx_2dx_3\left(\int_{\mathbb{R}^3}u^2x_2dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}u^2x_3dx\right)^{1/2}\\
&\leqslant 36\int_{\mathbb{R}^3}|u^3ux_1|dx\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u^2x_2|dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u^2x_3|dx\right)^{1/2}\\
&\leqslant 36\sqrt{I}\prod_{i=1}^{3}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u^2x_i|dx\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

En el final

$$\begin{aligned}
\sqrt{I} &\leqslant 36\prod_{i=1}^{3}\|ux_i\|_{L^2(\Omega)} = 36\left\{\prod_{i=1}^{3}\|ux_i\|_{L^2(\Omega)}^2\right\}^{1/2}\\
&\leqslant 36\left\{3^{-3}\left(\sum_{i=1}^{3}\|ux_i\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^3\right\}^{1/2}
\end{aligned}$$

Como $(a_1a_2a_3)^{1/3} \leqslant \dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$ para $a_i \geqslant 0$, lo que da la desigualdad deseada. ■

Teorema 2.37 (Desigualdad de Hardy, cf. [67, 63]). *Sea $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $u \in L^p(a,b)$ con $p > 1$. Entonces*

$$\int_a^b\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x|u(s)|ds\right)^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}^p\int_a^b|u(x)|^p dx\right), \tag{2.39}$$

y

$$\int_a^b \left(\frac{1}{b-x}\int_x^b |u(s)|ds\right)^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b |u(x)|^p dx \tag{2.40}$$

Prueba. Sea $u_n(x) = 0$, para $x \in (a, a+\frac{1}{n})$ y $u_n(x) = u(x)$ para $x \in (a+\frac{1}{n}, b)$. Probaremos la primera desigualdad. Integrando por partes y la desigualdad de Holder tenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(\frac{1}{x-a}\int_a^x |u_n(s)|ds\right)^p dx &= \frac{1}{(b-a)^{p-1}(1-p)}\left(\int_a^b |u_n(s)|ds\right)^p \\
&\quad + \frac{p}{p-1}\int_a^b \frac{1}{(x-a)^{p-1}}\left(\int_a^x |u_n(s)|ds\right)^{p-1}|u_n(x)|dx \\
&\leqslant \frac{p}{p-1}\int_a^b \frac{1}{(x-a)^{p-1}}\left(\int_a^x |u(s)|ds\right)^{p-1}|u_n(x)|dx \\
&\leqslant \frac{p}{p-1}\left(\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\left(\int_a^x |u_n(s)|ds\right)^p dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_a^b |u_n(x)|^p dx\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Así,

$$\int_a^b \left(\frac{1}{x-a}\int_a^x |u_n(s)|ds\right)^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^b |u(x)|^p dx \tag{2.41}$$

Para $n \in \mathbb{N}$, aplicando el lema de Fatou obtendremos (2.39) de manera similar obtenemos la segunda desigualdad. ■

2.37.1. Espacios de Sobolev de funciones periódicas

Consideramos espacios de Sobolev $H_p^s(Q)$ de funciones L periódicas en el dominio m dimensional $Q = [0, L]^m$. Sea $C_P^\infty(Q)$ el espacio de restricciones a Q de funciones infinitamente diferenciables que son L periódicas en cada dirección, esto es, $u(x + Le_j) = u(x)$, $j = 1, \cdots, m$ (Por ejemplo denotamos los vectores de base canónica, $e_j = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$, donde 1 está en la j-ésima coordenada).

Definición 2.38. Para un entero no negativo arbitrario S, definimos el espacio de Sobolev $H_P^S(Q)$ como la completación de $C_P^\infty(Q)$ en la norma.

$$\|u\|_{H_P^S(Q)} = \left\{\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant S} \|D_u^\alpha\|^2_{L^2(Q)}\right\}^{1/2}$$

denotamos, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ para enteros no negativos $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$, $|\alpha| = \alpha_1, \cdots, \alpha_m$, $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_m!$. Por $X = (x_1, \cdots, x_m)$, $X^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ en esta notación, la serie de Taylor en $\mathbb{R}^m$ puede escribirse igual que

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0)(x - x_0)^\alpha$$

2.38.1. Caracterización de los espacios de Sobolev $H_P^S(Q)$ mediante las series de Fourier

Cada función $u \in C_P^\infty(Q)$ tiene una representación

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} c_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}}$$

donde c_k son números complejos. Consideremos funciones reales, para las cuales $c_{-k} = \overline{c_k}$. Se sabe que para las funciones de la forma $C_P^\infty(Q)$ la serie anterior converge uniformemente. Tenemos

$$D^\alpha u(x) = \left(\frac{2\pi i}{L}\right)^{|\alpha|} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} c_k K^\alpha e^{2\pi i k \frac{x}{L}}$$

De la identidad de Parseval

$$\|D^\alpha u\|_{L^2(Q)}^2 = L^m \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{2|\alpha|} \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} |c_k|^2 k^{2\alpha}$$

Introducimos una nueva norma en $H_P^S(Q)$ por

$$\|u\|_{H_f^S(Q)}^2 = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} (1 + |k|^{2s}) |c_k|^2 \right\}^{1/2}$$

Lema 2.39. *Las normas $\| \cdot \|_{H_P^S}$ y $\| \cdot \|_{H_f^S(Q)}$ son equivalentes, esto es*

$$C_1 \|u\|_{H_f^S(Q)} \leqslant \|u\|_{H_P^S(Q)} \leqslant C_2 \|H_f^S(Q)\|$$

para toda $u \in H_P^S(Q)$ y alguna constante positiva C_1 y C_2.

Prueba. Para todo entero S existen constantes positivas C_1, C_2 tales que para toda $k \in \mathbb{R}^m$

$$C_1 \leqslant \frac{\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant S} k^{2\alpha}}{1 + |k|^{2S}} \leqslant C_2 \tag{2.42}$$

ahora

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^S_P(Q)} &= \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant S} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(Q)} = L^m \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant S} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{2|\alpha|} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |c_k|^2 k^{2\alpha}\right) \\
&\leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \left(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant S} |k|^{2|\alpha|}\right) |C_k|^2 \leqslant cC_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} (1+|k|^{2S})|C_k|^2 \\
&= cC_2 \|u\|^2_{H^S_f(Q)}
\end{aligned}$$

Tomando $c_2 = cC_2$ tenemos la segunda desigualdad del Lema. Utilizando de nuevo (2.42) obtenemos la primera desigualdad del lema. ■

Lema 2.40. *El espacio $H^S_P(Q)$ coincide con*

$$\left\{u \in L^2(Q) : u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} c_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}},\ \overline{c_k} = c_{-k},\ \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |k|^{2S}|c_k|^2 < \infty\right\}$$

Lema 2.41. *En el espacio*

$$H^S_P(Q) = \left\{u \in H^S_P(Q) : \int_Q u(x)dx = 0\right\}$$

(De esto $u \in H^S_P(Q)$ para el cual $c_0 = 0$ en su representación en serie) La expresión

$$\|u\|_{H^P_S(Q)} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |k|^{2s}|c_k|^2\right)^{1/2}$$

es una norma equivalente a la norma $\|\cdot\|_{H^S_P}(Q)$.

Prueba. La prueba viene de la desigualdad de Poincaré

$$\|u\|_{H^S_P(Q)} \leqslant \frac{L}{2\pi}\|Du\|_{L^2(Q)} \tag{2.43}$$

que vale para todo u en $H'_P(Q)$ de hecho, tenemos

$$\begin{aligned}
\|Du\|^2_{L^2(Q)} &= \sum_{|\alpha=1|} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(Q)} = \sum_{|\alpha=1|} L^m \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}} |c_k|^2|k|^2 \\
&\geqslant \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 L^m \sum_{k\in\mathbb{Z}^m\setminus\{0\}} |c_k|^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \|u\|_{L^2(Q)}
\end{aligned}$$

con lo cual termina la prueba. ■

En el espacio $\| \|_{H_P^S(Q)}$ introducimos el producto escalar

$$(u,v)_{H_P^S(Q)} = \sum_{k\in Z^m} |k|^{2s} c_k \overline{d_k},$$

por $u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} c_k e^{2\pi i x \frac{x}{L}}$, $V(x) = \sum_{k\in Z^m} d_k e^{-2\pi i k \frac{x}{L}}$
también tenemos

$$c_k = \hat{u}(k) = \frac{1}{L^m}\int_Q u(x) e^{-2\pi i k \frac{x}{L}} dx$$

Los coeficientes de Fourier $\hat{u}$ de u son amplitudes complejas de armónicos $e^{2\pi i k \frac{x}{L}}$ asociados a los números de onda $\frac{2\pi k}{L}$ es igual $\frac{L}{|k|}$ tenga en cuenta

$$\frac{L}{\sqrt{m}k_{\text{máx}}} \leqslant \frac{L}{|k|} = \frac{L}{\sqrt{k_1^2 + \cdots + k_m^2}} \leqslant \frac{L}{k_{\text{mín}}}$$

Teorema 2.42 (Teorema de inmersión de Sobolev). *Sea $u \in H_P^S(Q)$, $S > \frac{m}{2}$. Entonces $u \in C_P^0(Q)$ y*

$$\sup_{x\in Q}|u(x)| = \|u\|_{L^\infty(Q)} \leqslant C(S)\|u\|_{H_P^S(Q)}$$

Prueba. Sea $u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} c_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}}$. Entonces, para $S > \frac{m}{2}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty(Q)} &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |c_k| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \frac{1}{(1+|k|^{2S})^{1/2}} (1+|k|^{2S})^{1/2}|c_k| \\
&\leqslant \left\{ \sum_{k\in Z^m} \frac{1}{1+|k|^{2S}} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k\in Z^m} (1+|k|^{2S})|c_k|^2 \right\}^{1/2} = C(s)\|u\|_{H_P^S(Q)}
\end{aligned}$$

Además, la convergencia absoluta de la serie de coeficientes $\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |c_k|$ implica la convergencia uniforme de la serie de Fourier de u, y en consecuencia, la continuidad de u. ■

Teorema 2.43 (Rellich-Kondrachov). *El espacio $H_P'(Q)$ está inmerso de forma compacta en el espacio $L^2(Q)$ lo que significa que por cada sucesión de funciones acotadas en $H_p^1(Q)$ existe una subsucesión de funciones que es convergente en $L^2(Q)$.*

Prueba. Sea $\{u_n\}$, $u_n(x) = \sum_{k\in Z^m} c_n, K^{e^{2\pi ik\frac{x}{L}}}$, $n \in \mathbb{N}$ es una sucesión acotada en $H^1_P(Q)$ esto es,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} (1+|k|^2)|c_{n,k}|^2 \leqslant M$$

para toda n y alguna constante positiva M. Tenemos que demostrar que existe una subsucesión u_j que converge a alguna $u^* = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} c^*_k e^{2\pi ik\frac{x}{L}} \in H'_P(Q)$ fuertemente en $L^2(Q)$. Se sabe que de cada sucesión limitada en un espacio de Hilbert se puede elegir una subsucesión débilmente convergente.

Supongamos que u_j converge débilmente a u^* en $H'_P(Q)$ entonces u^* satisface.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} (1+|k|^2)|C^*_k|^2 \leqslant M$$

■

Observación 2.44. Sea u_j convergente débilmente a u^* en $H'_P(Q)$. Notemos que esto es equivalente a la convergencia de todos los coeficientes de Fourier, a saber $c_{j,k} \to c^*_k$ como $j \to \infty$, para todo $k \in \mathbb{Z}^m$.

Vamos a demostrar que la subsucesión u_j converge a u^* en $L^2(Q)$. Observe que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} (1+|k|^2)|c_{j,k} - c^*_k|^2 \leqslant 4M$$

donde:

$$\begin{aligned}
\|u_j - u^*\|^2_{L^2(Q)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |c_{j,k} - c^*_k|^2 \leqslant \sum_{|k|\leqslant k} |c_{j,k} - c^*_k|^2 + \frac{1}{k^2}\sum_{|k|>k} |c_{j,k} - c^*_k|^2|k|^2 \\
&\leqslant \sum_{|k|\leqslant k} |c_{j,k} - c^*_k|^2 + \frac{4M}{k^2}
\end{aligned}$$

para cada $\varepsilon > 0$ podemos tomar k lo suficientemente grande para que $\dfrac{4M}{k^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Entonces, en vista de la observación 2.44 podemos tomar j suficientemente grande para que el primer término en el lado derecho sea más pequeño que $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Esto demuestra la convergencia $u_j \to u^*$ en $L^2(Q)$.

2.44.1. Ecuación de Laplace en espacios de Sobolev de funciones periódicas

Sea $f \in L^2(Q)$ supongamos que buscamos $u \in H_P^S(Q)$ satisfaciendo la ecuación

$$-\Delta u = f \tag{2.44}$$

si $u \in H_P^S(Q)$ es una solución de (2.44) entonces para una constante arbitraria $c, u + c$ también es una solución en el mismo espacio. Para garantizar la unicidad restringimos nuestra atención a soluciones que satisfacen la propiedad adicional.

$$\int_Q u(x)dx = 0 \tag{2.45}$$

que es equivalente a $u \in H_P^S(Q)$. Pero también tenemos

$$\int_Q \Delta u(x)dx = 0 \tag{2.46}$$

Observación 2.45. Notar que si $u \in H_P^S(Q)$ satisface (2.45) entonces se cumple (2.46). Luego se tiene que

$$\int_Q f(x)dx = 0,$$

donde f esta en $L^2(Q) = H_P^0(Q)$. Ademas, para cualquier $f \in L^2(Q)$ existe una constante c tal que $f + c \in L^2(Q)$, en consecuencia, para que la solución sea única, asumiremos que $f \in L^2(Q)$.

Sea

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f_k e^{2\pi ik\frac{x}{L}}; \;\; f_0 = 0$$

y

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} c_k e^{2\pi ik\frac{x}{L}}; \;\; u_0 = 0 \tag{2.47}$$

Calculamos

$$-\Delta u(x) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |k|^2 u_k e^{2\pi ik\frac{k}{L}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f_k e^{2\pi ik\frac{x}{L}} = f$$

y comparando los coeficientes obtenemos

$$u_k = \frac{L^2}{4\pi^2}\frac{f_k}{|k|^2} \text{ para } k \neq 0 \tag{2.48}$$

Podemos probar ahora lo siguiente.

Lema 2.46. *Si $f \in L^2(Q)$ y $u \in H'_p(Q)$ es una ecuación generalizada de la ecuación de Laplace, esto es u satisface la identidad integral*

$$\int_Q \nabla u : \nabla v dx = \int_Q f_v dx \tag{2.49}$$

para toda v en $C'_P(Q)$, entonces $u \in H^2_P(Q)$ y

$$\|u\|_{H^2_P(Q)} \leqslant C\|f\|_{L^2(Q)} \tag{2.50}$$

Prueba. Observemos que la identidad integral anterior podemos tomar las funciones de prueba del espacio $H^1_P(Q)$. Entonces la existencia de una solución generalizada única en $H^1_P(Q)$ sigue fácilmente del Teorema Riesz-Frechet esta solución se da por (2.47) donde los coeficientes se dan en (2.48), además, la solución pertenece a $H^2_P(Q)$, como

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^2_P(Q)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |k|^4|u_k|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |k|^4 \left(\frac{L^2}{4\pi^2}\cdot\frac{f_k}{|k^2|}\right)^2 \\
&= \frac{L^4}{16\pi^4}\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} |f_k|^2 = \frac{L^4}{16\pi^4}\|f\|_{L^2(Q)}
\end{aligned}$$

Esto finaliza la prueba. ■

Observando la ecuación $-\Delta u = f$ como en la ecuación abstracta del operador $Au = f$ en el espacio $L^2(Q)$ con el operador $A : L^2(Q) \supset D(A) \to L^2(Q)$ vemos que

$$D(A) = \{u \in H'_P(Q) : Au \in L^2(Q)\} = H^2_P(Q)$$

de hecho, de (2.50) resulta que $D(A) \subset H^2_P(Q)$, por otro lado, para cada u en $H^2_P(Q)$, $Au \in L^2(Q)$, de donde $H^2_P(Q) \subset D(A)$.

Lema 2.47. *El operador A es invertible en $L^2(Q)$ y $A^{-1} : L^2(Q) \to L^2(Q)$ es compacto, esto es, asigna conjuntos acotados en $L^2(Q)$ a conjuntos precompactos en $L^2(Q)$.*

Prueba. De las consideraciones, sabemos que el operador A^{-1} asigna $L^2(Q)$ a $H_P^2(Q)$ y que la correspondencia es uno a uno. Del Teorema 2.43 se deduce que $H_p^2(Q)$ esta inmerso de forma compacta en $L^2(Q)$, donde A^{-1} es compacto. ■

Lema 2.48. *En el caso considerado de condiciones de frontera periódicas, las funciones propias del operador laplaciano en $L^2(Q)$ pertenecen a $C_P^\infty(Q)$.*

Prueba. Sea $AW = \lambda W \in L^2(Q)$, del Lema 2.46 se deduce que $W \in H_P^2(Q)$ por lo tanto $AW = \lambda W \in H_P^2(Q)$. Asi concluimos que $W \in H_P^1(Q)$. Por inducción obtenemos $W \in H_P^S(Q)$ para cada entero S, ahora, es suficiente usar el Teorema de inmersión de Sobolev para concluir que W pertenece a $C_P^\infty(Q)$. ■

Observación 2.49. Notar que si $f \in C_P^\infty(Q)$, $u \in H_P^1(Q)$, y $\Delta u = f$ entonces u es infinitamente suave, es decir, $u \in C_P^\infty(Q)$.

Teorema 2.50. *cf. [68]. Sea H un espacio de Hilbert y sea A un operador lineal simétrico en H, cuyo rango sea todo H, y suponga que su inversa esta definida y compacta. Entonces A tiene un conjunto infinito de autovalores reales λ_n con funciones propias correspondientes $w_n : Aw_n = \lambda_n w_n$. Si los autovalores están ordenados de modo que $|l_{n+1}| \geqslant |\lambda_n|$ uno tiene $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$. Además, el w_n puede ser elegido para que forman una base ortonormal para H, y en términos de esta base, el operador A puede ser representado por*

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, w_j)_H w_j$$

en su dominio

$$D(A) = \left\{ u : u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j w_j,\ \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \lambda_j^2 < \infty \right\}$$

$D(A)$ es un espacio de Hilbert con un producto interno $(u, v)_{D(A)} = (Au, Av)_H$ y la norma correspondiente

$$\|u\|_{D(A)} = \|Au\|_H$$

Para el operador $Au = -\Delta u$ en $L^2(Q)$, de donde tenemos

$$\begin{aligned} u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m\backslash\{0\}} c_k e^{2\pi i k\frac{x}{L}} &= \sum c_k(\cos(2\pi k\frac{x}{L}) + i\mathrm{sen}(2\pi k\frac{x}{L})) \\ &= \sum_{\frac{L^m}{2}} \sum_{k\in(\mathbb{Z}^m\backslash\{0\})/2} \Big(\mathrm{Re}(c_k)w_k^{(c)} - \mathrm{Im}(c_k)w_k^{(s)}\Big) \end{aligned}$$

donde

$$w_k^{(c)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L^m}}\cos(2\pi k\frac{x}{L}),\ w_k^s(x) = \sqrt{\frac{2}{L^m}}\mathrm{sen}(2\pi k\frac{x}{L})$$

y $Aw_k^{(\cdot)}(x) = \dfrac{4\pi^2|k|^2}{L^2}w_k^{(\cdot)}$, $\|w_k^{(\cdot)}\|_{L^2(Q)} = 1$.

Por ejemplo, para $m = 2$, el valor propio mas pequeño es $4\dfrac{\pi^2}{L^2}|k|^2$ con $|k| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = 1$, se repite cuatro veces, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ en la sucesión $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \cdots$

Las funciones propias correspondientes se dan como $w_! = w_{(1,0)}^{(c)}$, $w_2 = w_{(1,0)}^{(s)}$, $w_3 = w_{(0,1)}^{(c)}$, $w_4 = w_{(0,1)}^{(s)}$

2.51. Aspectos matemáticos sobre la dinámica de fluidos

El marco de resolución de las ecuaciones serán los espacios de Lebesgue, L^p, y Sobolev, $W^{m,p}$ (m entero, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$) usuales con las normas estándar $|\cdot|_p$, $|\cdot|_{m,p}$ respectivamente.

Definimos los espacios de Sobolev con media nula, como:

$$W_M^{m,p}(\Omega) = \left\{\psi : \psi \in W^{m,p}(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega \psi dx = 0\right\}$$

dotado de la misma norma que $W^{m,p}$.

Lema 2.52 (Desigualdad de Poincaré para funciones con media nula)**.** *Sea $\partial\Omega \in C^{0,1}$ y $\psi \in W_M^{1,p}(\Omega)$. Entonces:*

$$|\psi|_{1,p} \leqslant C_1 \left(\sum_{n=1}^{3} \left|\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right|_p^p\right)^{1/p} \tag{2.51}$$

donde C_1 es una constante positiva que solo depende de Ω y p.

Consideramos el problema de Stokes no homogéneo en Ω:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + \nabla\varphi = F, & \nabla \cdot \varphi = g, \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.52}$$

Lema 2.53 (Cattabriga-Solonnikov). *Sea $\partial\Omega$ de clase C^m, $F \in (W^{m-2,q})^3$ y $g \in W^{m-1,p}$ $(m \geqslant 1,\ 1 < q < \infty)$ tal que verifica la condición de compatibilidad:*

$$\int_\Omega g(x)dx = 0.$$

Entonces existe una y solo una solución $(\varphi, \pi) \in (W^{m,q})^3 \times W^{m-1,q}$ de (??) (π es única salvo constantes aditivas). Además se tiene la siguiente estimación de dependencia continua de la solución (φ, π) respecto de los datos (F, g):

$$|\varphi|_{m,q} + |\nabla\pi|_{m-2,q} \leqslant C_2 \left(|F|_{m-2,q} + |g|_{m-1,q}\right)$$

donde C_2 es una constante que solo depende de m, q y Ω.

Lema 2.54. *Sea L el operador diferencial lineal de primer orden*

$$L\psi = a\psi + \nabla \cdot (b\psi),$$

donde $a > 0$ es una constante y $b \in (W^{2,4})^3 \times (H_0^1)^3$. Consideramos que L actúa sobre funciones escalares ψ definidas en Ω, y consideramos

$$D(L) = \left\{\psi \in W^{1,4} : L\psi \in W^{1,4} \ y \ \int_\Omega \psi(x)dx = 0\right\}$$

si

$$a - 7C_4C_1|\nabla(\nabla \cdot b)|_4 - 4C_4|b|_{2,4} > 0 \tag{2.53}$$

para C_4 la constante tal que $|\psi|_\infty \leqslant C_4|\psi|_{1,4}$ (i.e., la constante de la inyección continua de Sobolev de $W^{1,4}$ en $C^0(\overline{\Omega})$), entonces, para cada $G \in W^{1,4}$ con $\displaystyle\int_\Omega G dx = 0$, existe una única solución $\psi \in D(L)$ de

$$L\psi = G \tag{2.54}$$

Demostración.

Gracias a la linealidad del operador diferencial, la existencia y unicidad en el espacio $H^1(\Omega)$ con medida nula se seguirá de forma estándar si conseguimos estimaciones a priori en dicho espacio.

Aplicamos un razonamiento de tipo Galerkin, eligiendo como base especial en $H^1(\Omega)$ una base $\{z_1, z_2, \cdots, z_m, \cdots\}$ de autovectores del problema:

$$\begin{cases} -\Delta z + z = \lambda z & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial z}{\partial n} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

cuya formulación variacional es:

$$z \in H^1(\Omega) \text{ tal que } ((z, w)) = \lambda(z, w),\ \forall w \in H^1,$$

donde $((\cdot,\cdot))$ es el producto escalar en $H^1(\Omega)$ y $(\cdot,\cdot)$ es el producto escalar en $L^2(\Omega)$.

Para demostrar la existencia de dicha base, consideramos el operador

$$T : f \in L^2(\Omega) \to z \in H^1(\Omega)$$

donde $z(f)$ es la solución del problema variacional:

$$((z, w))_{H^1} = (f, w)_{L^2},\ \forall w \in H^1.$$

Como $H^1(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$ (inyección compacta), entonces

$$T : L^2 \to L^2 \text{ es un operador compacto.}$$

Además $(Tf, g) = ((Tf, Tg)) = (f, Tg)$, $\forall f, g \in L^2$, luego T es autoadjunto.

Como $L^2(\Omega)$ es Hilbert separable, en virtud del Teorema de Hilbert-Schmidt, podemos asegurar la existencia de una base ortonormal en L^2, $\{z_1, z_2, \cdots, z_m, \cdots\}$ formada por autovectores de T. Es fácil ver que dicha base también es una base ortogonal de H^1.

Dada $G \in W^{1,4}$, consideramos el problema:

$$\text{hallar } \psi \in H^1(\Omega) \text{ tal que } a\psi + \nabla\cdot(b\psi) = G,$$

es decir,

$$\psi \in H^1 \text{ tal que } a(\psi,\varphi) - \int_\Omega \psi b\cdot\nabla\varphi = (G,\varphi),\ \forall\varphi\in H^1 \tag{2.55}$$

■

Planteamos el problema discretizado:

$$\psi_m \in \langle z_1,\cdots,z_m\rangle,\ a(\psi_m,\varphi) - \int_\Omega \psi_m b\cdot\nabla\varphi = (G,\varphi),\ \varphi\in\langle z_1,\cdots,z_m\rangle. \tag{2.56}$$

Poniendo

$$\psi_m = \sum_{j=1}^m \alpha_j z_j \text{ y } \varphi = z_i,\ i=1,\cdots,m, \tag{2.57}$$

obtenemos que (2.56) es equivalente al sistema lineal:

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \alpha_j a(z_j,z_i) - \alpha_j \left(\int_\Omega z_j b\cdot\nabla z_i \right) \right\} = (G,z_i),\ i=1,\cdots,m.$$

La matriz del sistema es:

$$A = \left(a(z_j,z_i) - \int_\Omega z_j b\cdot\nabla z_i \right)_{i,j=1}^m \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

Veamos que A es definida positiva. En efecto, dado $\alpha\in\mathbb{R}^m$, si consideramos ψ_m, como en (2.57),

$$(A\alpha,\alpha) = a|\psi_m|_2^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\cdot b)\psi_m^2$$

Como

$$\int_\Omega (\nabla\cdot b)\psi_m^2 \leqslant |\nabla\cdot b|_\infty|\psi_m|_2^2 \leqslant C_4|\nabla\cdot b|_{1,4}|\psi_m|_2^2 \leqslant C_4C_1|\nabla(\nabla\cdot b)|_4|\psi_m|_2^2$$

tenemos

$$(A\alpha,\alpha) \geqslant \left(a - \frac{1}{2}C_4c_1|\nabla(\nabla\cdot b)|_4 \right)|\psi_m|_2^2$$

Gracias a la hipótesis (2.53), en particular, $a - C_4C_1|\nabla(\nabla\cdot b)|_4 > 0$. Por tanto, el problema discreto (2.56) tiene una única solución: ψ_m. Además si tomamos en (2.56) como función test $\varphi = \psi_m$:

$$a|\psi_m|_2^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\cdot b)\psi_m^2 = (G,\psi_m) \leqslant \frac{a}{2}|\psi_m|_2^2 + \frac{1}{2a}|G|_2^2$$

Si repetimos el procedimiento anterior tenemos la siguiente estimación de ψ_m:

$$|\psi_m|_2^2 \leqslant \frac{|G|_2^2}{a(a - C_4 C_1 |\nabla(\nabla \cdot b)|_4)}. \tag{2.58}$$

En consecuencia, podemos extraer una subsucesión $(\psi_{m'})_{m'}$ tal que $\psi_{m'} \to \psi$ en L^2 débil. Además, pasando al límite en (2.56), tenemos que ψ es solución de (2.55). Además, $\int_\Omega \psi dx = 0$; para ello, basta tomar $\psi \equiv 1$ en (2.55) y tener en cuenta que $\int_\Omega G = 0$.

De este modo obtenemos solución de (2.54) en H^1. La unicidad es fácil, ya que el operador diferencial es lineal.

Para terminar la demostración del lema 2.54, veamos que realmente $\psi \in W^{1,4}$ (como $H^1 \hookrightarrow L^4$, basta ver que $\nabla\psi \in (L^4)^3$). Tomando gradiente en la ecuación $L\psi = G$, elevando a la 4 e integrando en Ω, tenemos:

$$\begin{aligned}
|\nabla G|_4^4 = a^4|\nabla\psi|_4^4 + |\nabla(\nabla \cdot (b\psi))|_4^4 + 2\int_\Omega a^2|\nabla\psi|^2|\nabla(\nabla \cdot (b\psi))|^2 dx \\
+ 4\int_\Omega a^2|\nabla\psi \cdot \nabla(\nabla \cdot (b\psi))|^2 dx + 4\int_\Omega a^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi \cdot \nabla(\nabla \cdot (b\psi))dx \\
+ 4\int_\Omega a\nabla\psi \cdot \nabla(\nabla \cdot (b\psi))|\nabla(\nabla \cdot (b\psi))|^2 dx
\end{aligned}$$

Empleando las desigualdades de Schwartz, Holder y Young deducimos que que:

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^2|\nabla(\nabla \cdot (b\psi))|^2 \geqslant \int_\Omega [\nabla\psi \cdot \nabla(\nabla \cdot (b\psi))]^2 dx \tag{2.59}$$

$$\int_\Omega a\nabla\psi \cdot (\nabla \cdot (b\psi))|\nabla(\nabla \cdot (b\psi))|^2 dx \geqslant -\frac{1}{6}|\nabla(\nabla \cdot (b\psi))|_4^4 - \frac{3}{2}a^2|\nabla\psi \cdot \nabla(\nabla \cdot (b\psi))|_2^2 \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla\psi|^2\nabla\psi \cdot \nabla(\nabla \cdot (b\psi))dx = \\
&\int_\Omega |\nabla\psi|^2\nabla\psi \cdot [b \cdot \nabla(\nabla\psi) + \psi\nabla(\nabla \cdot b) + (\nabla b)(\nabla\psi) + (\nabla \cdot b)(\nabla\psi)]dx \geqslant \\
&-\frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla\psi|^4(\nabla \cdot \psi)dx - C_4|\nabla(\nabla \cdot b)|_4|\nabla\psi|_4^4 - |\nabla b|_\infty|\nabla\psi|_4^4 + \int_\Omega (\nabla \cdot b)|\nabla\psi|^4 dx \geqslant \\
&-\left(\frac{3}{4}|\nabla \cdot b|_\infty + |\nabla b|_\infty + C_4 C_1|\nabla(\nabla \cdot b)|_4\right)|\nabla\psi|_4^4
\end{aligned} \tag{2.61}$$

De (2.59), (2.60) y (2.61) obtenemos finalmente:

$$|\nabla G|_4^4 \geqslant a^3 \left\{ a - 4(\frac{3}{4} C_4 C_1 |\nabla(\nabla \cdot b)|_4 + C_4 |b|_{2,4} + C_4 C_1 |\nabla(\nabla \cdot b)|_4) \right\} |\nabla \psi|_4^4 \geqslant$$
$$a^3 \left\{ a - 7 C_1 C_4 |\nabla(\nabla \cdot b)|_4 - 4 C_4 |b|_{2,4} \right\} |\nabla \psi|_4^4$$

luego, gracias a (2.53), tenemos que $\nabla \psi \in (L^4)^3$.

CAPÍTULO III

Resultados importantes sobre fluidos compresibles estacionarios

Ahora nos adentramos en el estudio de la *Mecánica del continuo*. En la cual de hipóteis el medio físico en el dominio Ω presenta las siguientes características:

Definición 3.1. Densidad de masa ρ con $\rho \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T))$ y positiva, de tal manera que la masa se ubica en un abierto acotado $W \subset \Omega$, para un instante determinado por t será dada por:

$$m(W, t) = \int_W \rho(x, t)dx,$$

Definición 3.2. Campo de velocidades u, con $u \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T); \mathbb{R}^N)$ y con la cantidad de movimiento dada por W y t será:

$$M(W, t) = \int_W (\rho u)(x, t)dx.$$

Definición 3.3. La densidad de energía interna por unidad de masa, w, con $w \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T))$ y positiva, de manera que la energía total en W en el instante t se determina con:

$$E_{\text{total}}(W, t) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho w \right) (x, t)dx,$$

donde $|u| = \sqrt{u \cdot u}$ es la norma usual del vector u.

En primera instancia, estudiamos la ecuación de la densidad de masa $\rho = \rho(x, t)$. Empleando la ley de conservación de masa, observamos que la variación de la masa para un volumen W en un instante dado t, $\displaystyle\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}dx$, debe de igualarse al tránsito de masa a través de la zona fronteriza ∂W, en ese mismo momento.

Dado que las partículas del fluído se desplazan por medio de las líneas de corriente (las cuales son las curvas características resultado de las soluciones del sistema diferencial ordinario: $\overset{\circ}{X} = u(X, t)$), dicho flujo de masa a través de la forma queda dada expresada por $-\int_{\partial W} \rho u \cdot n dS$, que aplicando la fórmula de Stokes a la expresión de la derecha, queda reducida a:

$$\int_W \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho u) \right\} = 0, \tag{3.1}$$

Para cada $W \subset \Omega$ y $t \in (0,T)$, donde considerando $\nabla \cdot (\rho \mu)_i$ determinamos $\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u)_i$. Con ello llegamos a la ecuación conocida como el principio de conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \text{ en } \Omega \times (0,T), \tag{3.2}$$

Otra forma de obtener (3.2) es a partir del transporte de masa sobre un intervalo dado $(t, t+h)$, empleando la ley de conservación de masa; en efecto:

$$\rho(X(t+h), t+h)J(h) = \rho(x,t),$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} X(t) = x, \\ \overset{\circ}{X}(s) = u(X(s), s). \end{array} \right.$$

y $J(h)$ es el jacobiano de la transformación: $x \to X(t+h, x)$ se conoce que $J(h) = 1 + h\nabla \cdot u(x,t) + o(h)$, de ello obtenemos:

$$\rho(x,t) + h \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + (\nabla \cdot u)\rho \right\} (x,t) + o(h) = \rho(x,t),$$

y llegamos a (3.2).

Prestamos nuestra atención al campo de velocidades denotado por $u = u_1(x,t), \cdots u_N(x,t)$, concretamente sobre la evolución de u, o del denotado momento ρu. Precisamente, aplicando el principio de conservación del momento, encontramos:

$$\int_W \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\int_{\partial w} \rho u(u \cdot n) dS + \int_W \rho f dx - \int_{\partial W} \sigma \cdot n dS, \tag{3.3}$$

Las últimas dos expresiones representan respectivamente la acción de todas las fuerzas externas sobre el fluido (gravedad, coriolis, fuerzas electromagnéticas, $\cdots$) y las fuerzas de tensión ejercidas sobre el límite del fluído ∂W sobre el contacto de W con otros cuerpos. Mientras que f es normalmente un dato, σ es ahora un tensor que se agrega como una nueva incógnita en las ecuaciones que están siendo consideradas, se le llama *tensor de esfuerzos*. Tradicionalmente, un fluido está sometido a dos tipos de esfuerzos: efectos de compresión (normales a ∂W) y efectos viscosos (tangenciales a ∂W), de manera que:

$$\sigma = -pId + \tau, \tag{3.4}$$

donde p es la presión (magnitud escalar) y τ denota al tensor de esfuerzos viscosos. Id determina el, $Id = (\delta_{ij})_{ij}$.

Conjugando (3.3) y (3.4), y empleando la fórmula de Stokes llegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \nabla \cdot \tau + \nabla p = \rho f, \tag{3.5}$$

donde $\otimes$ denota el producto tensorial de vectores, esto vendría a denotar explícitamente:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \rho_j(\rho u_i u_j - \tau_{ij}) + p\delta_{ij} = pf_i \;\; 1 \leqslant i \leqslant N, \tag{3.6}$$

(usando la convención de suma de índices repetidos y notando $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$).

Además, usando a (3.2), (3.5) se replantea de la forma:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u - \nabla \cdot \tau + \nabla p = \rho f, \tag{3.7}$$

Respecto a τ, si empleamos el principio de conservación del momento angular podemos concluir que τ es, en efecto, un tensor simétrico. Además, clásicamente se tiene por hipótesis, que:

$$\tau = \tau(\nabla u, \rho, T),$$

donde T es la temperatura. En el presente trabajo, discutiremos con profundidad los llamados fluidos newtonianos, es decir, supondremos que τ es lineal en ∇u de la forma:

$$\tau = \lambda(\nabla \cdot u)Id + 2\mu d, \tag{3.8}$$

con $d = \dfrac{1}{2}(\nabla u + \nabla u')$ es el tensor de deformaciones, y λ y μ vienen a ser coeficientes de viscosidad de Lamé (en principio, μ y λ dependen de ρ y T). Por ejemplo, para los llamados gases monoatómicos, se supone la relación de stokes $\lambda = -\frac{2\mu}{N}$, con N

la dimensión del espacio. En general, se considera que la expresión, $\lambda + \frac{2\mu}{3}$ es muy pequeña en fluídos, lo cual da pie a aproximarlo por un modelo donde dicha relación sea nula. Sin embargo, en la práctica solo se toman en cuenta las siguientes hipótesis:

$$\mu \geqslant 0, \quad \lambda + \frac{2\mu}{N} \geqslant 0, \tag{3.9}$$

Por ende se diferencian los fluidos viscosos $\mu > 0, \lambda + \mu > 0$ de los no viscosos ($\lambda = \mu = 0$, luego $\tau = 0$).

Por último, se deducen las ecuaciones que son consecuencia de la Ley de conservación de la energía. Para ello es necesario que las fluctuaciones termodinámicas sean suficientemente débiles en torno a una condición de equilibrio, en cada punto y en cada instante. Dicho estado termodinámico viene determinado por la presión, la energía interna por unidad de masa, la temperatura, y la densidad, que se representan por las expresiones: p, e, T, ρ y a su vez están relacionadas por las ecuaciones de estado: La energía total viene dada por la suma de la energía cinética $\rho\frac{|u|^2}{2}$ y la energía interna ρe, luego la ley de conservación de la energía se escribe:

$$\frac{d}{dt}\int_W \rho\left(\frac{|u|^2}{2}+e\right)dx = -\int_{\partial W}\rho\left(\frac{|u|^2}{2}+e\right)u{\cdot}nds+\int_W \rho f{\cdot}udx+\int_{\partial W}u{\cdot}(\sigma n)dS+Q, \tag{3.10}$$

donde el trabajo realizado por las fuerzas externas y de tensión están dado las dos últimas integrales, mientras que Q es la variación de calor a lo largo de la frontera, o sea,

$$Q = -\int_{\partial W} q \cdot nds,$$

donde q se introduce como una nueva incógnita vectorial que describe el flujo de calor que transita a través de la frontera.

Usando de nuevo la fórmula de Stokes, llega a definirse como: (3.10):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(\frac{|u|^2}{2}+e\right)\right\}+\nabla\cdot\left\{\rho\left(\frac{|u|^2}{2}+e\right)\right\} = -\nabla\cdot(pu)+\nabla\cdot(r\cdot u)-\nabla\cdot q+\rho f\cdot u. \tag{3.11}$$

Finalmente, queda estudiar el comportamiento de p, e y q. Se desarrollará sólo en el caso en que las varialbesρ y T son independientes, $p = p(\rho, T)$, $e = (\rho, T)$ y

$$q = -k(\rho, T, |\nabla T|)\nabla T, \tag{3.12}$$

donde k dependerá sólo de ρ y T o será una constante (llamada coeficiente de conductividad térmica).

En esta descripción, empleamos la variable de estado entropía, denotada por s que satisface la ecuación de Gibbs (supuesta la hipótesis de equilibrio termodinámico)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T}\left\{\frac{de}{dt} + p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{p}\right)\right\}, \tag{3.13}$$

donde $\frac{d}{dt}$ es la derivada convectiva ($\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla_x$). Multiplicando por ρ y usando (3.2), se llega a:

$$\rho\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T}\left(\rho\frac{de}{dt} + p(\nabla \cdot u)\right). \tag{3.14}$$

La entropía en un volumen dado W es $\int_W \rho s dx$, aplicando la Segunda ley de la termodinámica, a:

$$\int_W \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) \geqslant \int_{\partial W} \rho s u \cdot n ds - \int_{\partial W} \frac{q}{T} \cdot n ds, \tag{3.15}$$

y razonando de manera ya habitual en nuestra descripción:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s u) \geqslant -\nabla \cdot (\frac{q}{T}). \tag{3.16}$$

Multiplicando (3.7) por u, se llega:

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|u|^2}{2}\right) + \rho(u \cdot \nabla)\frac{|u|^2}{2} - \nabla \cdot (\tau u) + u \cdot \nabla p = \rho f \cdot u - \tau : Du = \rho f \cdot u - \tau : d,$$

donde: denota el producto escalar de matrices, que se transforma (usando (3.2)) en:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{|u|^2}{2}\right) + \nabla \cdot \left\{\rho\frac{|u|^2}{2}u\right\} - \nabla \cdot (\tau u) + u \cdot \nabla p = \rho f \cdot u - \tau : d, \tag{3.17}$$

y sustituyendo esta expresión a (3.11):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e u) + p(\nabla \cdot u) = -\nabla \cdot q + \tau : d, \tag{3.18}$$

que llega por (3.2) a:

$$\rho \frac{de}{dt} + p(\nabla \cdot u) = -\nabla \cdot q + \tau : d,$$

que, a su vez, usando (3.14) y de nuevo (3.2), llega :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s u) = -\frac{1}{T}(\nabla \cdot q) + \frac{1}{T}\tau : d. \tag{3.19}$$

Comparando con (3.16), se deduce que:

$$\tau : d - \frac{1}{T} q \cdot \nabla T \geqslant 0, \tag{3.20}$$

deberá verificarse para todo (ρ, u, T) (pues hipótesis restrictivas no han sido usadas en el proceso inductivo). En el caso que $u \equiv 0$, de (3.20) tenemos que $-q \cdot \nabla T \geqslant 0$, lo que implica de (3.12) que la función ahí descrita, k, es positiva, lo cual es consistente experimentalmente.

Por el contrario, si elegimos T constante, (3.20) se escribe $\tau : d \geqslant 0$, y de (3.8) llegamos a la relación:

$$\tau : d = 2\mu |d|^2 + \lambda (\nabla \cdot u)^2 \geqslant 0,$$

que aplica a los fluidos newtonianos, que es equivalente a la relación que se considera que verifican los coeficientes de Lamé.

Por otra parte, de la ecuación de la entropía, se considera la hipótesis termodinámica de que ρ y T son variables independientes, se concluye que:

$$\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial e}{\partial T}, \quad \frac{\partial s}{\partial \rho} = \frac{1}{T}\left\{\frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2}\right\}. \tag{3.21}$$

Para terminar, dos ejemplos son presentados: Un gas ideal es un fluido que obedece:

- La Ley de Mariotte, con f una función escalar.
- El efecto de Joule, $e = e(T)$ para e una función escalar.

Se llega a que f es lineal en T, lo que nos permite expresar p y e de la forma:

$$p = R\rho T, \quad e = e(T), \tag{3.22}$$

donde $R > 0$ y e es creciente en T. Ka constante; R recibe el nombre de constante del gas ideal. Escribiendo $c_v = e'(T)$ y $(c_v \geqslant 0)$, $c_v \geqslant 0$, $c_p = \dfrac{\partial h}{\partial T} = R + e'(T)$ donde $h = e + \dfrac{p}{\rho}$ es la entalpía, se tiene que $c_p > c_v$. Luego, denotando $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$, entonces $\gamma > 1$.

Con este modelo se suelen describir los fluidos comunes y los gases en condiciones normales (en otras palabras, que no son densos o están a altas temperaturas).

Suponiendo además que c_p y c_v son constantes:

$$e = c_v T, \quad c_v > 0, \quad \gamma = 1 + \frac{R}{c_v} > 1. \tag{3.23}$$

Deducimos entonces de (3.21) que $\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{c_v}{T} = \frac{R}{\gamma - 1}$ y $\frac{\partial s}{\partial \rho} = -\frac{R}{\rho}$, de donde:

$$s = Rlog\left(\frac{T^1}{den}\right). \tag{3.24}$$

Se puede deducir de la teoría cinética de los gases que $\gamma = \dfrac{N+2}{N}$ (para gases monoatómicos). La región más interesante para su estudio, desde el punto de vista físico, es para $\gamma \in (1, \frac{5}{3}]$.

El modelo para fluidos newtonianos es el siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \dfrac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u u_i) - \partial_j \{\mu(\partial_j u_i + \partial_i u_j)\} - \partial_i(\lambda(\nabla \cdot u)) + \partial_i p = \rho f_i, \ 1 \leqslant i \leqslant N, \\ \dfrac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e u) + p(\nabla \cdot u) - \nabla \cdot (k \nabla T) = \dfrac{\mu}{2}(\partial_i \mu_j + \partial_j u_i)^2 + \lambda(\nabla \cdot u)^2, \end{cases} \tag{3.25}$$

donde λ, μ, p y e son funciones de ρ y T, k verifica (3.12), y λ y μ satisfacen (3.9). El caso usual es λ, μ y k constantes, $p = R\rho T$ $(R > 0)$, $e = c_v T$ $(c_v > 0)$ y $\gamma = 1 + \dfrac{R}{c_v}$. Finalmente, s definida por (3.21) satisface:

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s u) = -\frac{1}{T}\nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{\mu}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 + \lambda(\nabla \cdot u)^2. \tag{3.26}$$

El presente trabajo se centrará en (3.25) con las condiciones $\mu > 0$ y $\lambda + \frac{2}{N}\mu > 0$, es decir las **ecuaciones de Navier-Stokes compresibles.**

Establecemos una clasificación de los principales modelos compresibles:

(I) Cuando $\lambda = \mu = k = 0$, nos encontramos ante las **ecuaciones de Euler compresibles**, que vienen representadas por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p(\rho \cdot T) = pf, \\ \dfrac{\partial}{\partial T}\left\{\rho\left(\dfrac{|u|^2}{2} + e\right)\right\} + \nabla \cdot \left\{\left(\rho\dfrac{|u|^2}{2} + \rho e + p\right)\right\} = pf \cdot u, \end{cases}$$

y en el caso de gases ideales, p, e y γ verifican (3.22) y (3.23). En el caso en que ρ, u y T sean regulares, la ecuación para la entropía (3.26) se transforma en:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla(\rho s u) = 0 \text{ o } \rho\frac{\partial s}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla s = 0.$$

De hecho, aparecen discontinuidades ("shocks") sobre las que la ecuación de la entropía no se verifica. Solo se garantiza que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla \cdot (\rho u s) \geqslant 0. \tag{3.27}$$

Para evitar las discontinuidades, se considera s constante en el instante inicial, de manera que s seguirá siendo constante en todo tiempo: $s = s_0$. Para el gas ideal, usando (3.24) verificamos que:

$$p = Re^{s_0/c_v}\rho^\gamma = C_0\rho^\gamma \ (C_0 > 0), \tag{3.28}$$

la ecuación de la energía queda desacoplada y se obtienes, para las incógnitas (ρ, u), el sistema dinámico para gases barotrópicos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + C_0\rho^\gamma = 0. \end{cases}$$

Por flujo barotrópico entendemos que la variación de temperatura afecta poco a la densidad, por lo que la ecuación de la energía se puede desacoplar en la ecuación de continuidad y la ecuación de momentos.

Este sistema tiene validez física restringida. En general, para un gas no ideal tenemos que una ley para la presión con $s = s_0$ conduce a:

$$p = p(\rho) = \overline{p}(\rho, T),$$

donde T ha sido previamente determinada para $s = s_0$ y p es creciente en ρ.

(II) Caso $\lambda, \mu > 0$, $k \geqslant 0$ y se desprecian los efectos de calor debidos a la disipación viscosa de la temperatura:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e u) + p\nabla \cdot u - k\nabla T = 0.$$

Suponiendo que la ley de Mariotte y el efecto de Joule se verifican (en el caso de un gas ideal, $e = c_v T,\ p = R\rho T$), así como $k = 0$, la ecuación de la entropía se convierte de nuevo en:

$$\rho\frac{\partial s}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla s = 0. \tag{3.29}$$

Si consideramos de nuevo s_0 constante, podemos deducir que $s = s_0$ y llegamos a las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles barotrópicas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \mu\nabla u - (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) + \nabla p(\rho) = \rho f, \end{cases}$$

donde $p(\rho) = \overline{p}(\rho, T)$ es creciente en ρ (y $s(\rho, T) = s_0$). De nuevo, en el caso de un gas ideal, $p(\rho) = C_0\rho^\gamma$, $C_0 = Re^{s_0/c_v}$.

(III) Las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles en el caso isotermo.

Estas provienen de la descripción matemática del comportamiento asintótico de los fluidos de (II) cuando:

$$p = p(\rho)T,\ e = c_v T \text{ y } c_v \to +\infty.$$

Se obtiene que T verifica:

$$\rho\frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla T = 0$$

$$\rho\frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla T - k\nabla T = 0,$$

si $\dfrac{k}{c_v} \to k$, entonces, una solución particular es entonces $T = T_0 > 0$ (es decir, temperatura constante). De este modo la descripción de (III) es la siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) - \mu \nabla u - (\lambda + u)\nabla(\nabla \cdot u) + T_0 \nabla p(\rho) = 0, \end{cases}$$

y $p(\rho) = R_\rho$ en el caso de un gas ideal ($p = p(\rho)$ creciente en ρ en el caso general).

Respecto a la elección de las condiciones sobre $\partial\Omega$ para ρ, u y T en el caso de Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$ conexo acotado y suficientemente regular, las más fáciles de tratar son:

(a) $u \cdot n = 0$ ó $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ (según sean las ecuaciones de Euler o Navier-Stokes),

(b) sin restricciones sobre ρ (gracias a las condiciones homogéneas anteriores para u), y

(c) $\dfrac{\partial T}{\partial n} = 0$ sobre $\partial\Omega$.

3.4. Soluciones estacionarias de las ecuaciones de Navier-Stokes

En esta sección algunas nociones básicas de la teoría de las ecuaciones de Navier-Stokes serán presentadas; los espacios funcionales H, V y V', el operador A de Stokes con su dominio dado $D(A)$ en H, y la forma bilineal B se aplica el método de Galerkin y teorema del punto fijo para probar la existencia de soluciones del problema estacionario no lineal y consideramos problemas de singularidad y regularidad de las soluciones. Para esto seguiremos la teoría resuelta en [45, 57] entre otros.

3.4.1. Problema básico estacionario

Si $Q = [0, L]^3$ y sea el espacio definido como :

$$H = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \dot{L}_p^2(Q)^3 : \ \operatorname{div} u = 0\},$$

y

$$V = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \dot{H}_p^1(Q)^3 : \ \operatorname{div} u = 0\},$$

de normas

$$\|u\|_H = |u| = \sqrt{\int_Q |u(x)|^2 dx}, \ |u|^2 = (u, u),$$

y

$$\|u\|_V = \|u\| = \sqrt{\int_Q |\nabla u(x)|^2 dx}, \ \|u\|^2 = (\nabla u, \nabla u),$$

Sean espacios de Hilbert V y H ($V \subset H$).Identificamos H con su dual H' dado del Teorema de representación de Riesz-Fréchet, se cumple $V \subset H \subset V'$ con cada espacio denso en el siguiente e inmersión continua.

3.4.2. Operador de Stokes

Definimos el operador de Stokes $A : V \to V'$

$$\langle Au, v \rangle = \int_Q \nabla u \cdot \nabla v dx; \text{ para todo } v \in V. \tag{3.30}$$

Esta definición se usa para escribir la fórmula débil para el problema de Stokes dado $f \in V'$, entonces $u \in V$ y $p \in \dot{L}^2(Q)$ de manera que:

$$-\nu \Delta u + \nabla p = f, \ \operatorname{div} u = 0, \tag{3.31}$$

En sentido débil:

$$\nu(\nabla u, \nabla v) - (p, \operatorname{div} v) = \langle f, v \rangle, \ v \in \dot{H}_p^1(Q)^3, \tag{3.32}$$

Una forma abstracta equivalente:

$$\nu \langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{para todo } v \in V. \tag{3.33}$$

Demostraremos que para $f \in H$, el laplaciano negativo coincide con el operador de Stokes , $Au = -\Delta u$, Con este fin. usamos la representación espectral explícita de funciones en $\dot{L}^2(Q)^3$. Supongamos al principio que $f \in \dot{L}^2(Q)^3$. Entonces.

$$f(x) = \sum_{k \in Z^3} f_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}}, \quad \sum_{k \in Z^3} |f_k|^2 < \infty, \ ; \ f_{-k} = \overline{f}_k, \quad f_0 = 0, \tag{3.34}$$

Siendo : $f_k = (f_k^1, f_k^2, f_k^3)$. Sea $u \in V$ y $p \in \dot{L}^2(Q)$ cumpliendose (3.32). Se asume que:

$$u(x) = \sum_{k \in Z^3} u_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}}, \ p(x) = \sum_{k \in Z^3} p_k e^{2\pi i k \frac{x}{L}} \tag{3.35}$$

con $u_0 = 0$, $k \cdot u_k = 0$, $p_0 = 0$, $u_{-k} = \overline{u}_k$, $p_{-k} = \overline{p}_k$ cumpliendose.

$$\nu \frac{4\pi^2 |k|^2}{L^2} u_k + \frac{2\pi i k}{L} p_k = f_k.$$

Multiplicando por k y usando la relación $k \cdot u_k = 0$ resulta.

$$p_k = \frac{L}{2\pi i} \frac{f_k \cdot k}{|k|^2} \text{ para } k \neq 0,$$

y luego calculamos

$$u_k = \frac{1}{\nu} \frac{L^2}{4\pi^2 |k|^2} \left(f_k - k \frac{f_k \cdot k}{|k|^2} \right), \ k \neq 0.$$

Si $f \in H$, se cumple $f_k \cdot k = 0$ y la ecuación para u_k se reduce.

$$u_k = \frac{1}{\nu} \frac{L^2}{4\pi^2 |k|^2} f_k \text{ para } k \neq 0.$$

Se tiene la solución débil u del problema de Stokes (3.33) (con $\nu = 1$) coincide con la solución débil del problema $-\Delta u = f$ para $f \in H$. De esto se tiene que $u \in \dot{H}_p^2(Q)^3$ además, de las fórmulas explícitas anteriores para los coeficientes de Fourier u_k y p_k obtenemos siguiente siguiente teorema de regularidad:

Teorema 3.5. *Si $f \in \dot{L}_p^2(Q)^3$, entonces $u \in \dot{H}_p^2(Q)^3$, $p \in \dot{H}_p^1(Q)$, y*

$$\frac{L^2}{4\pi^2} \left(\frac{L^2}{\pi^2 \nu^2} + 1 \right) \|f\|^2_{\dot{L}^2(Q)^3} \geqslant \|u\|^2_{\dot{H}_0^2(Q)^3} + \|p\|^2_{\dot{H}_0^1(Q)}$$

Prueba.

Tenemos

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{\dot{H}^2_0(Q)^3} &= \sum_{k\in Z^3} |k|^4|u_k|^2 = \sum_{k\in Z^3} |k|^4 \frac{1}{\nu^2}\frac{L^4}{16\pi^4|k|^4}\left|f_k - k\frac{f_k\cdot k}{|k|^2}\right|^2\\
&\leqslant 2\sum_{k\in Z^3} |k|^4\frac{1}{\nu^2}\frac{L^4}{16\pi^4|k|^4}|f_k|^2 + 2\sum_{k\in Z^3} |k|^4\frac{1}{\nu^2}\frac{L^4}{16\pi^4|k|^4}|f_k|^2\\
&= \frac{L^4}{4\pi^4\nu^2}\|f\|^2_{\dot{L}^2(Q)^3},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|p\|^2_{\dot{H}^1_p} = \sum_{k\in Z^3}|k|^2|p_k|^2 &= \sum_{k\in Z^3}|k|^2\frac{L^2}{4\pi^2}\left|\frac{f_k\cdot k}{|k|^2}\right|\\
&\leqslant \sum_{k\in Z^3}\frac{L^2}{4\pi^2}|f_k|^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}\|f\|^2_{\dot{L}^2(Q)^3},
\end{aligned}$$

lo cual da fin a la prueba. ■

Observación 3.6. Observe que dando f, u, p de la forma (3.34) (3.35) respectivamente, directamente en las ecuaciones (3.31) obtendríamos las mismas representaciones espectrales de la solución u, p. Por tanto, en particular:

$$D(A) = \{u \in V : \ Au \in H\} = V \cap \dot{H}^2_p(Q)^3.$$

3.6.1. El problema no lineal

Consideremos el problema estacionario

$$\begin{aligned}
-\nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &= f \ \text{ en } Q,\\
\operatorname{div} u &= 0 \ \text{ en } Q,
\end{aligned}$$

con una de las condiciones de contorno:

1. $Q = [0, L]^3$ en $\mathbb{R}^3$ y asumimos condiciones de contorno periódicas.

2. Q es un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$, con un límite suave y suponiendo la condición de frontera Dirichlet homogénea es $u = 0$ en ∂Q.

En el segundo caso definimos

$$H = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in L^2(Q)^3 : \operatorname{div} u = 0,\ u_n = u \cdot n|_{\partial Q} = 0\},$$

$$V = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in H_0^1(Q)^3 : \operatorname{div} u = 0\},$$

con las normas

$$\|u\|_H = |u| = \sqrt{\int_Q |u(x)|^2 dx},\ |u|^2 = (u, u),$$

$$\|u\|_V = \|u\| = \sqrt{\int_Q |\nabla u(x)|^2 dx},\ \|u\|^2 = (\nabla u, \nabla u).$$

El operador Stokes A se define de la misma manera que en el caso periódico (3.30) y tenemos

$$D(A) = \{u \in V : Au \in H\} = V \cap H^2(Q)^3.$$

En ambos escenarios, definimos $b(u, v, w) = ((u \cdot \nabla v), w)$ para $u, v, w \in V$ y definimos un operador no lineal $B : V \to V'$, $(Bu, v) = b(u, u, v)$ para todo $v \in V$. También en lugar de $(\nabla u, \nabla u)$ escribiremos $((u, v))$.

Observación 3.7. Note que:

(i) $\forall\ u, v, w \in V$ es $b(u, v, w) = -b(u, w, v)$, y así $b(u, v, v) = 0$.

(ii) Para todo $u, v, w \in V$, $|b(u, v, w)| \leqslant C(Q)\|u\|\|v\|\|w\|$.

Sean H y V los espacios funcionales correspondientes. Entonces la formulación débil del problema estacionario no lineal anterior es el siguiente: Sea $Q = [0, L]^3$ (para el problema peródico) o sea Q un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$ con frontera suave (para el problema de Dirichlet) entonces, para $f \in H$ ($f \in V'$) entonces $u \in V$ tal que $\nu((u, v)) + b(u, u, v) = \langle f, v\rangle$ para todo $v \in V$ o equivalentemente $\nu Au + Bu = f$ en H o V'. Se puede ver:

1. Para todo $f \in V'$ y $\nu > 0$ existe al menos una solución para el problema anterior.

2. Si $\nu^2 \geqslant c_1(Q)\|f\|_{V'}$, entonces la solución del problema anterior es única.

Prueba.

De 1. para demostrar la existencia de soluciones, el método de Galerkin será usado. Para cada $m \in \mathbb{N}$ sea

$$u_m(x) = \sum_{j=1}^{m} \xi_{j,m} w_j(x);\ \xi_{j,m} \in \mathbb{R}$$

es la solución aproximada, donde w_j, $j \in \mathbb{N}$ son las funciones propias del operador de Stokes correspondientes al problema considerado. Esto significa que

$$\nu((u_m, \nu)) + b(u_m, u_m, v) = \langle f, v\rangle;\ \text{para todo } v \in V_m \tag{3.36}$$

donde $V_m = \text{Gen}\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ tal solución existe en vista del Teorema del punto fijo de Brouwer.

Prueba de la existencia de u_m. Consideramos la bola

$$B = \{u \in V_m : \ \|u\| \leqslant \frac{1}{\nu}\|f\|_{V'}\}$$

y el mapa $\phi : \hat{u} \to u$ donde, $\hat{u}$ y u es la solución única del problema lineal

$$\nu((u, v)) + b(\hat{u}, u, v) = \langle f, v\rangle, \ \ \text{para todo } v \in V_m.$$

Tomando $v = u$ en esta identidad obtenemos que $u \in B$.

Mostraremos que ϕ es continuo en V_m, para este fin definimos:

$$\nu((w, v)) + b(\hat{w}, u, v) = \langle f, v\rangle;\ \forall v \in V_m.$$

Restando la ecuación por w, tomando $u - w = v$, y usando la estimación para la solución v, obtenemos

$$\|u - w\| \leqslant \frac{C(Q)}{\nu^2}\|f\|_{V'}\|\hat{u} - \hat{w}\|$$

Lo cual demuestra la continuidad de ϕ. Como V_m es un espacio de dimensión finita y ϕ es una mapa continuo de un conjunto convexo y compacto B a B, concluimos la existencia de u_m, solución de (3.36) en vista del Teorema del punto fijo de Brouwer de (3.36) concluimos $\|u_m\| \leqslant \dfrac{\|f\|_{V'}}{\nu}$.

Por tanto, para una subsucesión $u_m \to u$ débilmente en V, y $u_m \to u$ fuertemente en H, Como V esta inmerso compactamente en H, al pasar con m al límite en la ecuación 3.36 obtenemos la ecuación

$$\nu((u,v)) + b(u,u,v) = \langle f, v\rangle$$

para todo v una combinación lineal finita de los elementos de la base w_k, $k \in \mathbb{N}$ existe. Dado que tales elementos son densos en V, la existencia del teorema ha sido probada.

Prueba de 2. Para probar la unicidad de las soluciones para grandes coeficientes de viscosidad con respecto a las fuerzas de masa, $\nu^2 > C_1(Q)\|f\|_{V'}$, supongamos que hay dos soluciones distintas u_1 y u_2, esto es

$\nu((u,v)) + b(u_1,u_1,v) = \langle f, v\rangle$ y $\nu((u_2,v)) + b(u_2,u_2,v) = \langle f, v\rangle$, para todo $v \in V$.

Tomando $v = u_1 - u_2$ y substrayendo ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \nu\|u_1 - u_2\|^2 = -b(u_1-u_2, u_1-u_2) &\leqslant c_1(Q)\|u_1-u_2\|^2\|u_2\| \\ &\leqslant \frac{c_1(Q)}{\nu}\|f\|_{V'}\|u_1-u_2\|^2 \end{aligned}$$

como $\|u_2\| \leqslant \dfrac{1}{\nu}\|f\|_{V'}$, de donde:

$$\left(v - \frac{c_1(Q)}{\nu}\|f\|_{V'}\right)\|u_1-u_2\|^2 \leqslant 0$$

Se llega a una contradicción, de lo cual se concluye $u_1 = u_2$.

Mostraremos como se puede proceder de manera diferente para demostrar la existencia de soluciones aproxiamadas de Galerkin u_m que satisfagan (3.36).

Teorema 3.8. *Sea X un espacio de Hilbert en dimensión finita, con un producto escalar $[\cdot,\cdot]$ y la norma asociada $[\cdot]$, y sea $P : X \to X$ un mapa continuo que cumpla con:*

$$[P(\xi), \xi] > 0 \text{ } para \text{ } [\xi] = K > 0$$

para algún K, entonces existe $\xi \in K$ con $[\xi] \leqslant K$ para el cual $P(\xi) = 0$.

Prueba.

Definimos $B = B(0,k)$ una bola cerrada en X, centrada en cero y de radio k. Supongamos que P es diferente de cero en esta bola. Entonces el mapa

$$\xi \to S(\xi) = -\frac{kP(\xi)}{[P(\xi)]};\ S : B \to B \tag{3.37}$$

es continuo en X, empleando teorema del punto fijo de Brouwer deducimos que S tiene un punto fijo en B, es decir

$$\xi_0 = -\frac{kP(\xi_0)}{[P(\xi_0)]} \tag{3.38}$$

para algún $\xi_0 \in B$. Tenemos $[\xi_0] = k$. Multiplicando (3.38) por ξ_0 se obtiene

$$[\xi_0]^2 = -k\frac{[P(\xi_0), \xi_0]}{[P(\xi_0)]}$$

lo cual contradice $[P(\xi), \xi] > 0$ para $[\xi] = k$. Por lo tanto $P(\xi) = 0$ para algún $\xi \in B$.

Ahora, sea $x = v_m$ con la norma inducida por V. Vamos a definir $P = P_m : V_m \to V_m$ por la relación

$$[P_m(u), v] = ((P_m(u), v)) = \nu((u, v)) + b(u, u, , v) - \langle f, v\rangle \tag{3.39}$$

Cualesquiera $u, v \in V_m$, el mapa esta bien definido en vista del teorema de representación de Riesz-Fréchet. En efecto, para cada u en V_m, el mapa $\nu \to \nu((u, v)) + b(u, u, v) - \langle f, v\rangle$ define un funcional lineal y continuo en V_m. Por ende, un único $P_m(u)$ existe en V_m que satisface la relación anterior.

El mapa P_m es continua en V_m y

$$\begin{aligned} [P_m(u), u] &= \nu\|u\|^2 + b(u, u, u) - \langle f, u\rangle = v\|u\|^2 - \langle f, u\rangle \\ &\geqslant \nu\|u\|^2 - \|f\|_{V'}\|u\| = \|u\|\{\nu\|u\| - \|f\|_{V'}\} \end{aligned}$$

de ahí, para $k > \frac{\|f\|_{V'}}{\nu}$ y $\|u\| = k$ tenemos $[P_m(u), u] > 0$. Considerando nuestro Teorema auxiliar, vemos que existe U_m en V_m que cumple $P_m(u_m) = 0$, es decir, que satisface (3.36).

3.8.1. Fluidos compresibles isotérmicos: Existencia de soluciones y estimativas

A continuación citaremos diversos resultados importantes encontrados en Rodriguez Briceño [5] sobre fluidos estacionarios isotérmicos, que servirán de base para el estudio del presente trabajo. Para esto fijaremos un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con frontera lo suficientemente regular, tal que se puede describir el siguiente problema sobre el comportamiento estacionario de un fluido compresible viscoso donde la temperatura se conserva:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mu(\nabla v + \nabla v^t) + \lambda(\nabla \cdot v)Id) + \nabla p + \rho v \cdot \nabla v = \rho f \text{ en } \Omega, \\ \hfill \nabla \cdot (\rho v) = 0 \ \text{ en } \Omega. \end{cases} \tag{3.40}$$

En este caso ρ es la densidad, v la velocidad, f son las fuerzas exteriores, p es la presión, cuya expresión viene dada por la ecuación de estado para un fluido isotermo:

$$p = K\rho,$$

con $K > 0$ constante y μ, λ siendo los llamados coeficientes de Lamé (que supondremos constantes).

Así, las anteriores consideraciones termodinámicas conducen a las restricciones:

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geqslant 0.$$

Si definimos

$$\zeta = \frac{3\lambda + 2\mu}{3},$$

podemos escribir las ecuaciones en los coeficientes μ y ζ ($\mu > 0$, $\zeta \geqslant 0$) como:

$$\begin{cases} -\mu\Delta v - \left(\zeta + \frac{\mu}{3}\right) \nabla(\nabla \cdot v) + K\nabla\rho + (\rho v \cdot \nabla)v = \rho f \text{ en } \Omega, \\ \hfill \nabla \cdot (\rho v) = 0 \ \text{ en } \Omega. \end{cases} \tag{3.41}$$

Además, suponemos las condiciones adicionales:

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_\Omega \rho(x)dx = \bar{\rho} \cdot |\Omega|, \tag{3.42}$$

donde $\bar{\rho} > 0$ es una constante fijada, que representará la positividad de la masa total y la condición de adherencia sobre la frontera respectivamente (estamos suponiendo por ejemplo una frontera sólida, sin entrada ni salida de fluido).

Dado $f \in (L^4)^3$, definimos las siguientes constantes:

$$A_1 \equiv \frac{C_4C_2}{K}|f|_4 \left\{ \frac{49}{\mu}C_1 + 12\left(\frac{\zeta + \mu/3}{\mu}\right)\right\}$$

$$A_2 \equiv \frac{7C_1C_2}{(\zeta + \mu/3)} + C_2C_4|f|_4 \left\{ \frac{4}{K}C_1 + 9C_2\left(\frac{\overline{\rho}}{\mu}\right)^2 |f|_4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{K}C_1C_2C_4|f|_4\right)\right\}$$

$$A_3 \equiv C_2|f|_4 \left\{ \frac{4}{K}(C_1C_4 + C_5)\left(\frac{\zeta + \mu/3}{\mu}\right) + 3\left(\frac{\overline{\rho}}{\mu}\right)^2 C_2 \left(C_4 + (1 + C_4)\frac{C_1C_2}{K}|f|_4\right)\right\}$$

$$A_4 \equiv C_6 \left\{ \frac{2}{K} + \frac{C_2\mu}{(\zeta + \mu/3)}\right\}$$

$$A_5 \equiv C_2 \left\{ \frac{\mu K}{(\zeta + \mu/3)} + |f|_4 \left(K_1 + \frac{9}{2}\left(C_2C_4\frac{\overline{\rho}}{\mu}\right)^2 |f|_4\right)\right\}$$

donde $K_1 = |\Omega|^{1/4}$ ($|\Omega|$ es la medida de Lebesgue del dominio Ω) y C_5 y C_6 son constantes que definiremos más adelante.

A seguir enunciamos el resultado principal encontrado en [5] y que será de utilidad para el desarrollo de la siguiente sección:

Teorema 3.9. *Sea $\partial\Omega$ de clase C^2 y $f \in (L^4)^3$, tales que se verifican las desigualdades $A_i < 1$, $i = 1, 2, \cdots, 5$ entonces existe al menos una solución $(v, \rho) \in (W^{2,4})^3 \times W^{1,4}$ del problema (3.41)-(3.42).*

Además, dicha solución verifica las siguientes estimaciones:

$$|v|_{2,4} \leqslant \frac{3C_2}{2}\frac{\overline{\rho}}{\mu}|f|_4 \tag{3.43}$$

$$|\nabla\rho|_4 \leqslant 2C_2\frac{\overline{\rho}}{K}|f|_4 \tag{3.44}$$

$$\min_\Omega \rho > \frac{\overline{\rho}}{2} \tag{3.45}$$

Es importante destacar que el resultado anterior se consiguió a partir del siguiente Lema, el cual será de gran utilidad en la siguiente sección.

Lema 3.10 (Necas)**.** *(cf. [30]): Existe una constante $C_6 > 0$ tal que:*

$$|q|_0 \leqslant C_6 |\nabla q|_{-1,2} \ \ \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

CAPÍTULO IV

Método de elementos finitos para fludios compresibles estacionarios

Vamos a considerar métodos numéricos para el sistema de ecuaciones que se obtiene linealizando el estado estacionario, compresible, viscoso y barotrópico de las ecuaciones de Navier-Stokes cerca de una solución dada, llamada *flujo ambiente*. Seguimos principalmente el artículo de R. Bruce Kellogg & Biyue Liu (cf. [6]). El caso lineal se puede obtener a partir de las ecuaciones de Navier Stokes haciendo ciertas modificaciones, de ahí que nos refiramos a estos sistemas como *Sistemas de Stokes compresibles*. Aquí consideramos el caso estacionario 2-dimensional barotrópico;

$$\left\{ \begin{array}{rcc} -\mu\Delta\vec{u} - (\zeta + \mu/3)\nabla(\nabla\vec{u}) + \rho\vec{u}(\nabla\vec{u}) + \nabla p = \vec{f} & \text{en} & \Omega \\ \nabla(\rho\vec{u}) = 0 & \text{en} & \Omega \\ \vec{u} = 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.1}$$

que explícitamente quedaría (notando $\vec{u} = (u, v)$ y suponiendo $\rho = \rho(p)$);

$$\left\{ \begin{array}{rcc} (\zeta + 4\mu/3)u_{xx} - \mu u_{yy} - (\zeta + \mu/3)v_{xy} + \rho u u_x + \rho v u_y + p_x = f_1 & \text{en} & \Omega \\ -\mu v_{xx} - (\zeta + 4\mu/3)v_{yy} - (\zeta + \mu/3)u_{xy} + \rho u v_x + \rho v v_y + p_y = f_2 & \text{en} & \Omega \\ \frac{\partial\rho}{\partial p}[u p_x + v p_y] + \rho[u_x + v_y] = 0 & \text{en} & \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \end{array} \right. \tag{4.2}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ζ y μ están en las condiciones habituales de esta memoria y (u, v, p) son las variables dependientes, $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ e idénticamente para v y p.

Sin embargo, el sistema que vamos a estudiar se obtiene linealizando las ecuaciones anteriores de Navier Stokes barotrópicas cerca de un flujo ambiente (U, V, P) (una solución de (4.2)) y considerando sólo los términos de orden cero. Para ello, escribimos las ecuaciones que verificarían las incógnitas $\vec{(U)} + \vec{u}$ y $P + p$, con $\vec{u}$ y p suficientemente pequeños, y a dichas ecuaciones les restamos las de $\vec{U}$ y P. El sistema resultante para (u, v, p) es el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\zeta + 4\mu/3)u_{xx} - \mu u_{yy} - (\zeta + \mu/3)v_{xy} + \rho U u_x + \rho V u_y + p_x = f_1 & \text{en} & \Omega \\ -\mu v_{xx} - (\zeta + 4\mu/3)v_{yy} - (\zeta + \mu/3)u_{xy} + \rho U v_x + \rho V v_y + p_y = f_2 & \text{en} & \Omega \\ \rho'[U p_x + V p_y] + \rho[u_x + v_y] = f_3 & \text{en} & \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \\ \int_\Omega p dx dy = 0 & & \end{array}\right. \tag{4.3}$$

donde U, V y P son funciones dadas de (x, y), $\rho = \rho(P)$ es una función (conocida) creciente positiva que define la densidad en función de la presión ambiente P, $\rho' = \dfrac{d\rho}{dP}(P)$ y f_1, f_2 y f_3 están reformuladas respecto del problema (4.2), abarcando ahora también a los términos de orden superior a cero. Como $\rho' \neq 0$, la ecuación (4.3) contiene una derivada convectiva de p, y por lo tanto es una ecuación hiperbólica en p. En consecuencia, (4.3) no es un sistema elíptico ni hiperbólico, pero contiene rasgos de ambas clases de funciones. Los sistemas de este tipo, es decir, que poseen rasgos elípticos e hiperbólicos, reciben el nombre de ïncompletamente elípticos", en el caso estacionario, e ïncompletamente parabólicos" en el caso de evolución.

Las condiciones sobre existencia de solución del flujo ambiente se analizan de manera análoga a lo desarrollado en [5], y del cual se ha rescado el resultado principal en la sección anterior. En el caso de flujo ambiente cercano a cero se sabe, por ejemplo, que el problema tiene solución única.

Nos centramos entonces en la aplicación del método de Elementos Finitos para el sistema (4.3). Tomamos la formulación débil y aplicamos elementos finitos conformes a las dos componentes de la velocidad y la presión. El resultado principal es que si tomamos subespacios de funciones continuas para las presiones y los subespacios de Elementos Finitos satisfacen la misma condición de estabilidad (inf-sup) que se requiere en el sistema de Stokes, entonces el sistema discreto de elementos finitos tiene a lo sumo una solución y, en el caso de que dicha solución exista, podemos obtener cotas de error. Sin embargo, la cota del error obtenida no será de orden óptima debido a la presencia del término de convección.

4.1. Formulación abstracta y aproximación de Galerkin general.

Según la estructura del problema (4.3), consideramos una formulación abstracta en términos de operadores, donde aparecerá tres formas bilineales. Se planteará un esquema del tipo Galerkin general para dicha formulación y se analizará el error de dicha aproximación.

Sean V, M, Q espacios de Hilbert, con $Q \subset M$, Q denso en M y $\|q\|_M \leqslant \|q\|_Q$. Sean a, b y c formas bilineales acotadas en $V \times V$, $V \times M$ y $Q \times M$ respectivamente. Consideramos el problema variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } (\vec{f}, g) \in V' \times M', \text{ hallar } (\vec{u}, p) \in V \times Q \text{ tales que:} \\ \qquad\qquad a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) = \left\langle \vec{f}, \vec{v} \right\rangle \ \forall \vec{v} \in V, \\ \qquad\qquad c(p, q) - b(\vec{u}, q) = \langle g, q \rangle \ \forall q \in M. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

De forma usual, asociamos a las formas a, b y c los operadores: $A : V \to V'$, $B' : M \to V'$, $C : Q \to M'$, definidos por:

$$\langle A\vec{v}, \vec{w} \rangle = a(\vec{v}, \vec{w}) \ \forall \vec{v}, \vec{w} \in V,$$
$$\langle B\vec{v}, q \rangle = b(\vec{v}, q) \ \forall \vec{v} \in V, \ q \in M,$$
$$\langle Cp, q \rangle = c(p, q) \ \forall p \in Q, \ q \in M,$$

Por definición, las normas de dichos operadores son iguales a las de las formas bilineales correspondientes. En términos de operadores el problema (4.4) se escribe:

$$\left\{ \begin{array}{l} A\vec{u} + B'p = \vec{f} \text{ en } V', \\ Cp - B\vec{u} = g \text{ en } M', \end{array} \right. \tag{4.5}$$

donde B' denota al operador adjunto de B, es decir, $B : V \to M'$, tal que

$$\langle B'q, \vec{v}\rangle = b(\vec{v}, q)\ \forall \vec{v} \in V, q \in M.$$

Para garantizar la existencia de solución, debemos imponer algunas condiciones sobre las formas bilineales:

H1). a es coerciva en V, i.e., existe un número $\alpha > 0$ tal que:

$$a(\vec{v}, \vec{v}) \geqslant \alpha\|\vec{v}\|_V^2\ \forall \vec{v} \in V, \tag{4.6}$$

(H2). existe una constante γ tal que:

$$c(q, q) \geqslant -\gamma\|q\|_m^2\ \forall q \in Q, \tag{4.7}$$

(H3). b satisface la condición inf-sup en $V \times M$, i.e., existe una constante $k > 0$ tal que:

$$\inf_{q\in M} \sup_{\vec{v}\in V} \frac{b(\vec{v}, q)}{\|\vec{v}\|_V \|q\|_M} \geqslant k$$

Nota: Gracias al estudio sobre el sistema de ecuaciones del tipo (4.4) que se lleva a cabo, por ejemplo, en el libro de Brezzie y Fortin, se tiene que la solución $(\vec{u}, p)$ del problema (4.4) es única (en caso de existir). ahora bien, dicho estudio no se podrá aplicar si consideramos solo los espacios V y M porque la forma bilineal $c(p, q)$ no está acotada en $M \times N$. Necesitamos entonces un espacio Q que con una norma que controle la forma bilineal c. En el caso del sistema de Stokes compresible, esto será debido a que en la definición de c estará la derivada convectiva de p.

Para aproximar (4.4), elegimos subespacios finito dimensionales $V_h \subset V$ y $Q_h \subset Q$, donde h denota el parámetro de discretización. El problema aproximado (P_h) será el siguiente:

$$\begin{gathered} \text{hallar } (\vec{u}_k, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tal que :} \\ a(\vec{u}_h, \vec{v}_h) + b(\vec{v}_h, p_h) = \left\langle \vec{f}, \vec{v}_h \right\rangle \forall \vec{v}_h \in V_h, \\ c(p_h, q_h) - b(\vec{u}_h, q_h) = \langle g, q_h\rangle\ \forall q_h \in M_h. \end{gathered} \tag{4.8}$$

Análogamente al caso continuo, definimos los operadores discretos $A_h : V_h \to V_h'$, $B_h : V_h \to M_h'$, $B_h' : M_h \to V_h'$ y $C_h : Q_h \to M_h'$ como:

$$\langle A_h v_h, w_h\rangle = a(\vec{v}_h, w_h)\ \forall \vec{v}_h, \vec{w}_h \in V_h,$$

$$\langle B_h\vec{v}_h, q_h\rangle = b(\vec{v}_h, q_h)\ \forall\vec{v}_h \in V_h, q_h \in M_h$$

$$\langle B'_h q_h, v_h\rangle = b(\vec{v}_h, q_h)\ \forall\vec{v}_h \in V_k, q_h \in M_h,$$

$$\langle C_h p_h, q_h\rangle = c(p_h, q_h)\ \forall p_h \in Q_h, q_h \in M_h,$$

Se tiene que $\|A_h\| \leqslant \|a\|$, $\|B_h\| \leqslant \|b\|$, $\|B'_h\| \leqslant \|b\|$, $\|C_h\| \leqslant \|c\|$, y el problema (4.8) en términos de operadores se escribe:

$$\begin{aligned} A_h\vec{u}_h + B'_h p_h &= \vec{f} \text{ en } V'_h, \\ C_h p_h - B_h\vec{u}_h &= g_h \text{ en } M'_h. \end{aligned} \tag{4.9}$$

(H3). Finalmente, suponemos que b satisface la condición inf-sup en $V_h \times M_h$, i.e. existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{\vec{v}_h \in V_h} \frac{b(\vec{v}_h, q_h)}{\|\vec{v}_h\|_V \|q_h\|_M} \geqslant \beta \tag{4.10}$$

Lema 4.2. *En las hipótesis (H1), (H2) y (H3), el problema discreto (4.8) posee a lo más una solución, siempre que* $\gamma \leqslant \frac{1}{2}\alpha\beta^2\|a\|^{-2}$.

Demostración.

De la hipótesis (H1), la aplicación lineal $A_h : V_h \to V'_h$ es invertible, $\alpha \leqslant \|A_h\|$ y $\|A_h{-}1\| \leqslant \alpha^{-1}$. Usando la inversa y eliminando $\vec{u}_h$ de (4.9) escribimos:

$$C_h p_h + B_h A_h^{-1} B'_h p_h = g_h := g_h + B_h A_h^{-1}\vec{f} \text{ en } M'_h. \tag{4.11}$$

Para resolver (4.9), basta resolver (4.11) para una función lineal $\vec{g}_h \in M_h g'$. La ecuación (4.11) es equivalente al problema variacional:

$$p_h \in Q_h \text{ tal que } c(p_h, q_h) + b(A_h^{-1} B'_h p_h, q_h) = \langle \vec{g}_h, q_h\rangle\ \forall q_h \in M_h. \tag{4.12}$$

Si definimos $C_h(p_h, q_h) = c(p_h, q_h) + b(A_h^{-1} B'_h p_h, q_h)$, se tiene que C_h es una forma bilineal acotada sobre $Q_h \times M_h$. Pasamos pues a obtener una estimación inferior sobre dicha forma. Fijado $p_h \in Q_h$, sea $w_h = A_h^{-1} B'_h p_h$, por lo que $A_h w_h = B'_h$. Entonces:

$$a(\vec{w}_h, \vec{v}_h) = b(\vec{v}_h, p_h)\ \forall \vec{v}_h \in V_h$$

Tomando $v_h = w_h$,

$$a(\vec{w}_h, \vec{w}_h) = b(\vec{w}_h, p_k) = b(A_h^{-1} B_h' p_k, p_k)$$

En consecuencia, usando las hipótesis (H1) y (H2),

$$C_h(p_h, p_h) \geqslant -\gamma \|p_h\|_M^2 + \alpha \|A_h^{-1} B_h' p_h\|_V^2$$

Como además A_h es un operador acotado y $\|A_h\| \leqslant \|a\|$:

$$\|A_h^{-1} \vec{f}\|_V \geqslant \|A_h\|^{-1} \|\vec{f}\|_{V_h'} \geqslant \|a\|^{-1} \|\vec{f}\|_V.$$

Por lo tanto

$$C_k(p_h, p_h) \geqslant -\gamma \|p_h\|_M^2 + \alpha \|a\|^{-2} \|B_h' p_h\|_{V_h}$$

De (4.10), $\|B_h'\|_{V_h'} = \sup_{v_h \in V_h} \dfrac{\langle B_h' p_h, \vec{v}_h \rangle}{\|\vec{v}_h\|_{V_h}} \geqslant \beta \|p_h\|_{M_h}$

Por lo que: $C_h(p_h, p_h) \geqslant (\alpha \|a\|^{-2} \beta^2 - \gamma) \|p_h\|_{M_h}$

Así pues, si γ satisface la condición del enunciado de este lema:

$$\overline{C_h}(p_h, p_h) \geqslant \overline{\gamma} \|p_h\|_{M_h}^2 \tag{4.13}$$

donde $\overline{\gamma} = \frac{1}{2} \alpha \beta^2 \|a\|^{-2}$. En consecuencia, demostramos la coercividad en norma M_h para los elementos de Q_h.

Reformulando entonces el problema (4.8) para enmarcarlo dentro de la hipótesis del Lema de Necas (ver Lema 3.10), definimos la siguiente forma bilineal continua, $d : (V \times Q) \times (V \times M) \to \mathbb{R}$:

$$d((\vec{u}, p), (\vec{v}, q)) = a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) + c(p, q) - b(\vec{u}, q)$$

Y entonces nuestro problema se traduce en:

$$\begin{gathered} \text{Hallar } (\vec{u}, p) \in V \times Q \text{ tal que} \\ d((\vec{u}, p), (\vec{v}, q)) = \left\langle (\vec{f}, g), (\vec{v}, q) \right\rangle, \ \forall (\vec{v}, q) \in V \times M \end{gathered} \tag{4.14}$$

Considerando la versión discreta de dicho problema, vemos que la condición (4.13) implica que se verifica la hipótesis (ii) del lema de Necas mencionado para $X = V \times M$, $Y = V \times Q$. Se obtiene así la unicidad de solución del problema (4.12) (y también del problema (4.8)), en el caso de que dicha solución exista. (Para ello necesitaríamos, por ejemplo, verificar la hipótesis (i) del mismo lema de Necas.) ■

Veamos ahora una acotación del error en la solución aproximada:

Teorema 4.3. *En las hipótesis del lema 5.1, si $(\vec{u}, p)$ es la solución de (4.4) y $(\vec{u}_h, p_h)$ la solución de (4.8), (en caso de existir) entonces:*

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_V + \|p - p_h\|_M \leqslant K \underset{\vec{u}_h \in V_h; q_h \in Q_h}{inf} [\|\vec{u} - \vec{v}_h\|_V + \|p - q_h\|_Q] \tag{4.15}$$

Demostración.

Para cada $\vec{v}_h \in V_h$ y $\overline{q}_h \in Q_h$ tenemos:

$a(\vec{u} - \vec{u}_h, \vec{v}_h) + b(\vec{v}_h, p - p_h) = 0$

$c(p - p_h, \overline{q}_h) - b(\vec{u} - \vec{u}_h, \overline{q}_h) = 0$

Por lo tanto, para cada $\vec{v}_h$, $\overline{\vec{v}_h} \in V_h$, y q_h, $\overline{q}_h \in Q_h$,

$$a(\vec{u}_h - \vec{v}_h, \overline{\vec{v}_h}) + b(\overline{\vec{v}_h}, p_h - q_h) = a(\vec{u} - \vec{v}_h, \overline{\vec{v}_h}) + b(\overline{v}_h, p - q_h) \tag{4.16}$$

$$c(p_h - q_h, \overline{q}_h) - b(\vec{u}_h - \vec{v}_h, \overline{q}_h) = c(p - q_h, \overline{q}_h) - b(\vec{u} - \vec{v}_h, \overline{q}_h) \tag{4.17}$$

Sea $F_h \in V_h'$ un funcional lineal definido sobre V_h por:

$$a(\vec{u} - \vec{v}_h, \overline{\vec{v}_h}) + b(\overline{\vec{v}_h}, p - q_h) = \langle F_h, \overline{v_h} \rangle \; \forall \overline{\vec{v}_h} \in V_h$$

luego:

$$| \left\langle F_h, \overline{\vec{v}_h} \right\rangle | \leqslant K_1 \{\|\vec{u} - \vec{v}_h\|_V + \|p - q_h\|_M\} \|\overline{\vec{v}_h}\|_V$$

donde $K_1 = \text{máx}\{\|a\|, \|b\|\}$, y de este modo:

$$\|F_h\|_{V_h'} \leqslant K_1 \{\|\vec{u} - \vec{v}_h\|_V + \|p - q_h\|_M\}$$

De forma similar, definimos $G_h \in M_h'$ como el funcional lineal tal que:

$$\langle G_h, \overline{q_h} \rangle = c(p - q_h, \overline{q_h}) - b(\vec{u} - \vec{v}_h, \overline{q_h}) \; \forall \overline{q_h} \in Q_h$$

luego:

$$|\langle G_h, \overline{q_h}\rangle| \leqslant K_2\{\|\vec{u}-\vec{v}_h\|_V + \|p-q_h\|_Q\}\|\overline{q_h}\|_M$$

donde $K_2 = \text{máx}\{\|b\|, \|c\|\}$ por lo que:

$$\|G_h\|_{M_h'} \leqslant K_2\{\|\vec{u}-\vec{v}_h\|_V + \|p-q_h\|_Q\}$$

De este modo, las ecuaciones (4.16) y (4.17) se pueden escribir de la forma:

$$A_h(\vec{u}_h - \vec{v}_h) + B_h'(p_h - q_h) = \vec{F}_h \text{ en } V_h'$$

$$C_h(p_h - q_h) - B_h(\vec{u}_h - \vec{v}_h) = G_h \text{ en } M_h'$$

Por lo tanto, de manera similar al lema 4.2,

$$C_h(p_h - q_h) + B_h A_h^{-1} B_h'(p_h - q_h) = G_h + B_h A_h^{-1}\vec{F}_h \text{ en } M_h'$$

y, gracias a (4.13),

$$\overline{C}_h(p_h - q_h, p_h - q_h) \geqslant \overline{\gamma}\|p_h - q_h\|_{M_h}^2 \tag{4.18}$$

En consecuencia,

$$\|p_h - q_h\|_M \leqslant K_3\{\|G_h\|_{M_h'} + \|B_h A_h^{-1}\overline{F}_h\|_{M_h'}\}$$

donde $K_3 = \dfrac{1}{\overline{\gamma}} = 2\|a\|^2\alpha^{-1}\beta^{-2}$. Usando ahora las acotaciones para $\|G_h\|_{M_h'}$ y $\|\vec{F}_h\|_{V_h'}$ obtenemos:

$$\|p_h - q_h\|_M \leqslant K_4\{\|\vec{u}-\vec{v}_h\|_V + \|p-q_h\|_Q\} \tag{4.19}$$

donde $K_4 = K_2K_3 + K_1K_3\|b\|\alpha^{-1}\,\text{máx}\{1, K\}$.

Escribiendo $p - p_h = p - q_h + q_h - p_h$ y usando la desigualdad triangular, obtenemos la estimación (4.15) para $p - p_h$, con $K = 1 + K_4$.

Necesitamos ahora acotar el error en u. Para ello tomamos $\overline{\vec{v}_h} = \vec{u}_h - \vec{v}_h$ en (4.16), de donde:

$$a(\vec{u}_h - \vec{v}_h, \vec{u}_h - \vec{v}_h) = -(\vec{u}_h - \vec{v}_h, p_h - q_h) + \langle F_h, \vec{u}_h - \vec{v}_h\rangle$$

Usando la coercividad de a para acotar la parte izquierda, obtenemos:

$$\|\vec{u}_h - \vec{v}_h\|_V \leqslant \alpha^{-1}\{\|b\|\|p_h - q_h\|_M + \|\vec{F}_h\|_{V_h'}\}$$

y usando (4.19) y la cota de $\|F_h\|_{V_h'}$:

$$\|\vec{u}_h - \vec{v}_h\|_V \leqslant K_5\{\|\vec{u} - \vec{v}_h\|_V + \|p - p_h\|_Q\}$$

donde $K_5 = \alpha^{-1}(K_1 + K_4)$. Escribiendo $\vec{u} - \vec{u}_h = \vec{u} - \vec{v}_h + \vec{v}_h - \vec{u}_h$, y usando de nuevo la desigualdad triangular, obtenemos la estimación para $\vec{u} - \vec{u}_h$ de (4.15) con $k = 1 + K_5$. Consideremos pues la constante de (4.15) como $K = a + \max\{K_4, K_5\}$. ■

Observación 4.4.

1. El valor de la constante K se puede especificar en la demostración.

2. No podemos esperar que la estimación (4.15) sea óptima en términos de la razón de convergencia, pues el error de la presión ($p - p_h$ a la izquierda) se mide en la norma de M y el error de la mejor aproximación (a la derecha) se mide en una norma mas exigente como es la de Q.

4.5. Método de elementos finitos para el sistema de Stokes compresible

En esta sección, volvemos al problema (4.2). La existencia y unicidad de la solución de dicho problema se verifica bajo hipótesis adecuadas sobre el flujo ambiente. La principal hipótesis es que el flujo ambiente sea suficientemente pequeño. Citamos el resultado que aparece en el artículo de A. Valli (cf. [2]) y que ha sido desarrollado en [5].

Teorema 4.6. *Supongamos $\rho > 0$, $\rho' > 0$ constantes, $f_j \in H^1(\Omega)$, $j = 1, 2$, $f_3 \in H^2(\Omega)$ tal que $\int_\Omega f_3 dxdy = 0$, $U, V \in H^3(\Omega)$ con $U = V = 0$ sobre $\partial\Omega$. Entonces existe una constante $K' > 0$ tal que si:*

$$\|U\|_3 + \|V\|_3 < K'$$

entonces existe una única solución $(u, v, p) \in H^3(\Omega) \times H^3(\Omega) \times H^2(\Omega)$ *de* (4.2) *que satisface* $\int_\Omega p dxdy = 0$*. La solución satisface a priori la desigualdad:*

$$\|u\|_3 + \|v\|_3 + \|p\|_2 \leqslant K''\{\|f_1\|_1 + \|f_2\|_1 + \|f_3\|_1\}$$

Nota: La presión tiene una regularidad adicional: $Up_x + Vp_y \in H^2(\Omega)$. Por lo tanto, la desigualdad anterior no se puede transformar en un isomorfismo entre los espacios indicados.

Pasamos ahora a aplicar la formulación débil de la sección anterior al sistema de Stokes compresible. Debemos especificar los espacios V, M y Q, así como las formas bilineales a, b y c. Reescribiendo (4.3)$_3$, dividiendo por ρ, obtenemos:

$$\overline{U}p_x + \overline{V}p_y + U_x + v_y = f_3$$

donde $\overline{U} = \rho' U/\rho$, $\overline{V} = \rho' V/\rho$ y $\overline{f}_3 = f_3 \rho$.

Definimos $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $\overline{u} = (u, v)$ y definimos la forma bilineal a como:

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{u}) = \int_\Omega [&(\zeta + 4\mu/3)u_x\overline{u}_x + \mu u_y \overline{u}_y + (\zeta + \mu/3)v_x\overline{u}_y + \mu v_x \overline{v}_x \\ &+ (\zeta + 4\mu/3)v_y\overline{v}_y + (\zeta + \mu/3)u_x\overline{v}_y + (\rho U u_x + \rho V u_y)\overline{u} \\ &+ (\rho U v_x + \rho V v_y)\overline{v}]dxdy, \forall \vec{u}, \vec{\overline{u}} \in V \end{aligned}$$

donde $\vec{\overline{u}} = (\vec{u}, \vec{v})$.

Consideramos $M = L_0^2(\Omega)$ y Q el subconjunto de M cuyas funciones verifican que:

$$\|q\|_Q^2 = \|q\|_M^2 + \int_\Omega [\overline{U}q_x + \overline{V}q_y]^2 dxdy < +\infty. \tag{4.20}$$

y definimos las formas bilineales b y c como:

$$b(\vec{u}, q) = -\int_\Omega q(u_x + v_y)dxdy = -\int_\Omega (\nabla \cdot \vec{u})q dxdy,\ \vec{u} \in V,\ q \in M$$

$$c(p, q) = \int_\Omega (\overline{U}p_x + \overline{V}p_y)q dxdy,\ p \in Q, q \in M$$

Se puede comprobar fácilmente que a, b y c están acotadas en los espacios adecuados. Además, veamos condiciones suficientes para que se verifiquen las hipótesis (H1) y (H2).

Lema 4.7. *Existen unas constantes $K > 0$, $\alpha > 0$ tales que si $|U_x|_\infty + |V_y|_\infty + |\nabla P|_\infty < K$, entonces se verifica (4.6). Además, (4.7) se verifica para una constante $\gamma(K)$ que puede ser arbitrariamente pequeña si elegimos K pequeña.*

Demostración.

Aplicando el teorema de Green al término $\int_\Omega u_y v_x dxdy$ y aplicando la desigualdad de Cauchy obtenemos:

$$\begin{aligned} a(\vec{u},\vec{u}) = & \int_\Omega [(\zeta+\mu/3)(u_x^2+v_y^2)+\mu(u_y^2+v_x^2)+(\zeta+\mu/3)(v_x u_y+u_x v_y)]dxdy \\ & + \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\left[U\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2)+V\frac{\partial}{\partial y}(u^2+v^2)\right]dxdy \\ \geqslant & \int_\Omega \mu(u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2)dxdy - \frac{1}{2}\int_\Omega [(\rho U)_x+(\rho V)_y](u^2+v^2)dxdy \end{aligned}$$

Como (U,V,P) es el flujo ambiente, $(\rho U)_x + (\rho V)_y = 0$ por (4.2). Para funciones más generales $U, V, \rho(P)$, podemos usar la desigualdad de Poincaré y vemos que si $|U_x|_\infty + |V_y|_\infty + |\nabla P|_\infty < K$, con K suficientemente pequeño (dependiendo de μ y de la constante de la desigualdad de Poincaré) entonces:

$$a(\vec{u},\vec{u}) \geqslant \mu/2(\|\nabla u\|_0^2 + \|\nabla v\|_0^2)$$

Por otra parte,

$$c(p,p) = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\overline{U}_x+\overline{V}_y)p^2 dxdy \geqslant -\frac{1}{2}|\overline{U}_x+\overline{V}_y|_\infty \|p\|_M^2 \geqslant -\gamma(K)\|p\|_M^2$$

cuando $|U_x|_\infty + |V_y|_\infty + |\nabla P|_\infty < K$. ■

Observación 4.8. La hipótesis del lema 4.7 se puede precisar más:

Cuando $|(\rho U)_x + (\rho V)_y|_\infty < K$ obtenemos (4.9) y si $|\overline{U}_x + \overline{V}_y|_\infty < K_1$ obtenemos (4.10) con $\gamma(K_1)$ suficcientemente pequeño si K_1 es pequeño.

Consideramos ahora los espacios de elementos finitos $V_h \subset V$ y $Q_h \subset Q$. Por la definición de la forma c, los espacios de Elementos Finitos para presiones discontinuas no se pueden incluir. Gracias al lema 4.7 y el teorema 5.2, un par (V_h, Q_h) de subespacios deseables para una aproximación del sistema de Stokes compresible por elementos finitos es aquel donde (4.10) se verifica (condición inf-sup).

Nuestro propósito es dar una versión del lema de Fortin que nos dé las condiciones bajo las que la condición (4.10) se verifica. Necesitamos primero estimaciones en las normas negativas. Ya conocemos para que $q \in L^2(\Omega)$:

$$\|q\|_{-1} = \sup_{\phi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega q\phi dxdy}{\|\phi\|_1}$$

Escribimos ahora el lema de Fortin para el problema que abordamos en este capítulo:

Lema 4.9. *Supongamos que existe una proyección $\pi_h : V \to V_h$ tal que:*

$$\int_\Omega q_h \nabla \cdot \vec{v} dxdy = \int_\Omega q_h \nabla \cdot (\pi_h \vec{v}) dxdy \ \forall q_h \in Q_h \tag{4.21}$$

$$\|\nabla(\pi_h \vec{v})\|_0 \leqslant C\|\nabla \vec{v}\|_0 \ \forall \vec{v} \in V \tag{4.22}$$

donde C es independiente de h.

Entonces los subespacios V_h y Q_h satisfacen la condición inf-sup (4.11).

Demostración.

Sea $q_h \in Q_h$. Usando el lema de Necas anteriormente referenciado:

$$\begin{aligned}\|q_h\|_0 \leqslant C\|\nabla q_h\|_{-1} = C \sup_{\vec{v} \in V} \frac{\int_\Omega q_h \nabla \cdot \vec{v} dxdy}{\|\vec{v}\|_1} \\ \leqslant C_1 \sup_{\vec{v} \in V} \frac{\int_\Omega q_h \nabla \cdot \vec{v} dxdy}{\|\nabla \vec{v}\|_0} \leqslant C_2 \sup_{\vec{v} \in V} \frac{\int_\Omega q_h \nabla \cdot (\pi_h \vec{v}) dxdy}{\|\nabla(\pi_h \vec{v})\|_0} \\ \leqslant C_2 \sup_{\vec{v}_h \in V_k} \frac{\int_\Omega q_h \nabla \cdot \vec{v}_h dxdy}{\|\nabla \vec{v}_h\|_0}\end{aligned}$$

con lo que (4.10) se verifica. ■

Como consecuencia del lema 4.9 y del teorema 4.3, los subespacios de elementos finitos con presiones continuas que son estables para el sistema de Stokes incompresibles son también estables para el sistema de Stokes compresible (4.2).

Describamos ahora el efecto de usar tales subespacios:

Sea T_h una partición de Ω en triángulos o cuadriláteros de diámetro h, $W_h \subset H_0^1(\Omega)$ y $Q_h \subset Q$ subespacios de funciones continuas que restringidas sobre cada elemento de T_h son polinomios de grado $\leqslant k$ y m respectivamente. Sea entonces $V_h = W_h \times W_h$. consideramos las propiedades de aproximación conocidas para los elementos finitos:

$$\begin{aligned}\text{ínf}_{\vec{v}\in V_h} \|\vec{u} - \vec{v}_h\|_1 \leqslant C_1 h^k \|\vec{u}\|_{k+1}\ \forall \vec{u} \in V \cap (H^{k+1}(\Omega))^2 \\ \text{ínf}_{q_h\in Q_h} \|p - q_h\|_0 \leqslant C_2 h^{m+1} \|p\|_{m+1},\ \forall p \in Q \cap H^{m+1}(\Omega)\end{aligned} \tag{4.23}$$

donde C_1 y C_2 son constantes independientes de h. (Ver Ciarlet (cf. [15])). Veamos un resultado de convergencia y estimaciones de error en el caso $k = 2$ y $m = 1$.

Teorema 4.10. *Supongamos que nos encontramos en las hipótesis (H1), (H2) y (H3) y que $\vec{f} \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, $f_3 \in H^2(\Omega)$. Sea $(\vec{u}, p)$ y $(\vec{u}_h, p_h)$ las soluciones de (4.2) y (4.8) respectivamente. Entonces existe una constante K tal que:*

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_1 \leqslant K h^2 (\|\vec{f}\|_1 + \|f_3\|_2) + K h^1 (\|f\|_1 + \|f_3\|_2) \tag{4.24}$$

Demostración.

Directamente del torema 4.3 tenemos que:

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_V + \|p - p_h\|_M \leqslant K \inf_{\vec{v}_h\in V_h, q_h\in Q_h} [\|\vec{u} - \vec{v}_h\|_V + \|p - q_h\|_Q]$$

Por la definición de la norma en Q dada en (4.20), necesitamos acotar la integral que aparece. Para ello usamos el resultado de regularidad 5.3 y conseguimos la siguiente acotación de ese término:

$$\int_\Omega \left[\overline{U} p_x + \overline{V} p_y\right]^2 dxdy \leqslant K' \|\nabla p\|_0 \leqslant K' \|p\|_1 \tag{4.25}$$

usando ahora las estimaciones (4.23) concluimos la acotación de los dos primeros sumandos de (4.25):

$$\text{ínf}_{\vec{v}_h\in V_h} \|\vec{u} - \vec{v}_h\|_1 + \text{ínf}_{q_h\in Q_h} \|p - q_h\|_0 \leqslant C_3 h^2 (\|\vec{u}\|_3 + \|p\|_2) \leqslant K h^2 (\|\vec{f}\|_1 + \|f_3\|_2)$$

y la del sumando correspondiente a la integral como:

$$\int_\Omega \left[\overline{U} p_x + \overline{V} p_y\right]^2 dxdy \leqslant K' C_2 h (\|\vec{f}\|_1 + \|f_3\|_2)$$

de lo que se concluye (4.24). ■

CONCLUSIONES

Conclusión 1:

Respecto al estudio de la ecuación (3.40), y del Teorema 3.9, podemos concluir que no solo existen soluciones débiles del problema, si no, que estas son únicas para cada fuerza externa $f \in (L^4)^3$ y densidad $\rho \in W^{1,4}$ fija. Esto es debido a que si suponemos que existen dos soluciones débiles $(v_i, \rho) \in (W^{2,4})^3 \times W^{1,4}$ para $i = 1, 2$ con la misma fuerza externa $f \in (L^4)^3$ y la misma densidad ρ, entonces, al comparar las velocidades, obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} -\nabla \cdot (\mu(\nabla w + \nabla w^t) + \lambda(\nabla \cdot w)Id) + \nabla p + \rho w \cdot \nabla w = 0 \text{ en } \Omega, \\ \nabla \cdot (\rho w) = 0 \quad \text{en } \Omega, \end{array} \right. \tag{4.26}$$

con $w = v_1 - v_2$, donde, por el Teorema 3.9 sobre el sistema (4.26) con fuerza externa nula, se tiene que

$$|w|_{2,4} \leqslant 0,$$

es decir, $v_1 = v_2$ en $(W^{2,4})^3$.

Conclusión 2:

El caso barotrópico general, i.e., donde $p = p(\rho)$ se procedería por el mismo método, realizando previamente la siguiente modificación:

$$\nabla p(\rho) = p'(\rho)\nabla\rho = p'(\overline{\rho})\nabla\rho + (p'(\overline{\rho}))\nabla\rho$$

donde $p'(\overline{\rho}) \equiv$ constante, al ser el valor de la función p en el punto $\overline{\rho} = \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \rho dx$. Sustituimos $\nabla p(\rho)$ en la ecuación (3.41) por $p'(\overline{\rho})\nabla\rho$, pasando $p'(\rho) - p'(\overline{\rho})\nabla\rho$ al segundo miembro, es decir:

$$-\mu\Delta u - (\zeta + \mu/3)\nabla(\nabla \cdot v) + p'(\overline{\rho})\nabla\rho = [p'(\overline{\rho}) - p'(\rho)]\nabla\rho - \rho[(v \cdot \nabla)v - f]$$

y la F del problema A queda de la forma:

$$F = -\frac{\sigma + \overline{\rho}}{\mu^2} u \cdot \nabla u + (\sigma + \overline{\rho})f + [p'(\overline{\rho}) - p'(\sigma + \overline{\rho})]\nabla\sigma$$

Si $p \in C^2$, podríamos escribir:

$$p'(\overline{\rho}) - p'(\overline{\rho} + \sigma) = -p''(\xi)\theta$$

donde ξ es un valor intermedio entre $\overline{\rho}$ y $\overline{\rho} + \sigma$ (variable), con lo que:

$$F = \frac{\sigma + \overline{\rho}}{\mu^2} v \cdot \nabla v - (\sigma + \overline{\rho}) f - p''(\xi)\sigma\nabla\sigma$$

Se introducirán entonces las modificaciones correspondientes en la escritura de lod A_i, para que a partir de las nuevas acotaciones de F_{n-1}, podamos garantizar las mismas desigualdades necesarias para la convergencia del método de las aproximaciones sucesivas.

Conclusión 3:

Se obtiene unicidad de solución (que no existencia) para la linealización de las ecuaciones de Navier-stokes barotrópicas cerca de un flujo en un ambiente ideal dado.La novedad se presenta que la formulación de la solución en velocidad-presión y no en velocidad-densidad,como se hace normalmente.

TRABAJOS FUTUROS

Como se pudo mostrar en el presente trabajo, el área de estudio de la dinámica de fluidos es un tema donde se encuentra aún muchos problemas en abierto. Esperamos y recomendamos que este trabajo sirva de motivación para futuras tesis, publicaciones, etc. Es así que resaltamos los siguientes puntos más importantes para futuras investigaciones:

1. Después de explorado el problema elíptico asociado a un fluido compresible e isotérmico, quedaría por explorar su parte hiperbólica o parabólica dependiendo del enfoque que se le quiera dar a la Ecuación de Navier-Stokes compresible. La existencia de soluciones estacionarias sugiere que un modelo dinámico converja a dichas soluciones, siempre que este sea del típo gradiente.

2. Una parte por explorar es en el caso del estudio de las ecuaciones referentes a un fluido compresible barotrópico. En este caso se sugiere intentar la misma metodología para la parte estacionaria, teniendo sumo cuidado en la parte de la existencia, dado que los Lemas de Cattabriga-Solonnikov ya no se podrían usar, debido a que no se podrá descomponer directamente a un problema de Stokes asociado.

3. Otro punto importante a estudiar es la existencia de un atractor global minimal para el sistema hiperbólico asociado a (1.1), dado que, si se muestra la existencia de un semigrupo asociado al sistema y que este sea gradiente, entonces debido a la compacidad asintótica, se tendría que tener que el atractor global coincide con el conjunto de puntos estacionarios sobre el espacio de fase. Este sería un trabajo a futuro a realizar en la línea de los sistemas dinámicos no lineales.

4. Finalmente, queda a disposición estudiar el caso en que Ω sea una variedad Riemanniana 3-dimensional, compacta, con borde lo suficientemente suave, de

tal manera que las ecuaciones de Navier-Stokes involucren una nueva descripción geométrica a partir del Operador de Hodge y la conexión de Levi-Civita asociada. Este trabajo motivaría diversos resultados en el análisis geométrico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] M. Padula, Existence and Uniqueness for Viscous Steady Compressible Motions, Arch. Rational Mech. Anal., 1982

[2] A. Valli, On the Existence of Stationary Solutions to Compressible Navier-Stokes Equations, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 4, No. 1, 1987.

[3] A. Valli, Periodic and Stationary Solutions for Compressible Navier-Stokes Eqations Via a Stability Method, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 4, 1983.

[4] A. Valli, W. M. Zajaczkowski, Global Existence and Qualitative Properties of the Solutions in the General Case, Comm. Math. Phys., t. 103, pp. 259-296, 1986.

[5] J. K. Rodriguez Briceño, Existencia de soluciones débiles para una ecuación de Navier Stokes-3D estacionaria, compresible e isotérmica. Tesis para obtar al Título de Lienciado en Matemática por la Universidad Nacional del Callao con repositorio `http://repositorio.unac.edu.pe/handle/UNAC/4044`, 2018.

[6] R. Bruce Kellogg, Biyue Liu, A finite Element Method for Compressible Stokes Equations, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 33, No. 2, pp. 780-788, April 1996.

[7] O. Pironneau, J. Rappaz, Numerical Analysis for Compressible Viscous Adiabatic Stationary Flows, Comput. Sci. Engrg., 1, pp. 109-137, 1989.

[8] J. Simon, Existencia de Solución del Problema de Navier-Stokes con Densidad Variable, Curso de la Universidad de Sevilla, 1989.

[9] R. Bellido, Análisis Matemático de Algunos Sistemas de Tipo Navier-Stokes: Fluidos Quasi-Newtonianos y Ecuaciones Primitivas del Océano, Curso de la Universidad de Sevilla , 2001.

[10] A. Matsumura, T. Nishida, The Initial Value Problem for the Equations of Viscous and Heat-Conductive gases, J. Math. Kyoto Univ., 20, pp. 67-104, 1980.

[11] J. G. Heywood, R. Rannacher, Finite Element Approximation of the Nonstationary Navier-Stokes Problem II: Stable Solutions and Error Estimates Uniform in Time, SIAM J. Numer. Anal. 23, pp. 750-777, 1986.

[12] J. Necas, Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques. Mason, Paris, 1967.

[13] J. Necas, Sur les norms équivalentes dans $W_p^k(\Omega)$ et sur la coercivité des formes formellement positives, Équations aux Dérivées Partielles, Les Presses de l'Université de Montréal, Canada, 1965.

[14] J. Necas, Sur une méthode pour résoudre les edp du style elliptique voisine de la variationnelle, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 4, pp. 305-326, 1962.

[15] P.L. Lions, Mathematical Topics in Fluids Mechanics, Vol. 1, Incompressible Models, Univ. Paris-Dauphine École Polytechnique, Oxford Univ. Press. Inc., NY, 1996.

[16] F.A. Williams, Combustion Theory, second edition, Benjamin Cummings, 1985.

[17] P.J. O'Rourke, Collective drop effects on vaporizing liquid sprays, PhD thesis, Los Alamos National Laboratory, 1981.

[18] G. Dufour, Modélisation multi-fluide eulérienne pour les écoulements diphasiques à inclusions dispersées, PhD thesis, Université Paul-Sabatier Toulouse-III, France, 2005.

[19] L. Desvillettes, Some aspects of the modeling at different scales of multiphase flows, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 199(21-22) (2010) 1265-1267.

[20] L. Boudin, C. Grandmont, A. Moussa, Global existence of solutions to the incompressible Navier-Stokes-Vlasov equations in a time-dependent domain, J. Differential Equations 262(2017) 1317-1340.

[21] L. Boudin, C. Grandmont, A. Lorz, A. Moussa, Modelling and numerics for respiratory aerosols, Commun. Comput. Phys. 18(3) (2015) 723-756.

[22] T. Goudon, L. He, A. Moussa, P. Zhang, The Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck system near equilibrium, SIAM J. Math. Anal. 42(5) (2010) 2177-2202.

[23] C. Baranger, L. Boudin, P.-E. Jabin, S. Mancini, A modeling of biospray for the upper airways, in: CEMRACS 2004-Mathematics and Applications to Biology and Medicine, in: ESAIM Proc., vol.14, EDP Sci., Les Ulis, 2005, pp.41-47 (electronic).

[24] C. Baranger, L. Desvillettes, Coupling Euler and Vlasov equations in the context of sprays: the local-in-time, clas-sical solutions, J. Hyperbolic Differ. Equ. 3(1) (2006) 1-26.

[25] J. Mathiaud, Local smooth solutions of a thin spray model with collisions, Math. Models Methods Appl. Sci. 20(2) (2010) 191-221.

[26] A. Mellet, A. Vasseur, Global weak solutions for a Vlasov-Fokker-Planck/Navier-Stokes system of equations, Math. Models Methods Appl. Sci. 17(7) (2007) 1039-1063.

[27] A. Mellet, A. Vasseur, Asymptotic analysis for a Vlasov-Fokker-Planck/compressible Navier-Stokes system of equations, Comm. Math. Phys. 281(3) (2008) 573-596.

[28] M. Chae, K. Kang, J. Lee, Global classical solutions for a compressible fluid-particle interaction model, J. Hyper-bolic Differ. Equ. 10(3) (2013) 537-562.

[29] F. Li, Y. Mu, D. Wang, Global well-posedness and large time behavior of strong solution to a kinetic-fluid model, arXiv:1508.07389, 2015.

[30] M. Chae, K. Kang, J. Lee, Global existence of weak and classical solutions for the Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck equations, J. Differential Equations 251(9) (2011) 2431-2465.

[31] H. Fujita, N. Sauer, On existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with moving bound-aries, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I 17 (1970) 403-420.

[32] T. Caraballo, J. Real, Navier-Stokes equations with delays, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 457, 2441-2453 (2001).

[33] T. Caraballo, J. Real, Asymptotic behaviour of two-dimensional Navier-Stokes equations with delays, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 459, 3181-3194 (2003).

[34] T. Caraballo, J. Real, Attractors for 2D-Navier-Stokes models with delays, J. Differ. Equ. 205, 271-297 (2004).

[35] T. Caraballo, G. Lukaszewicz, J. Real, Pullback attractors for non-autonomous 2D-Navier- Stokes equations in some unbounded domains, C. R. Acad. Sci. I Math. 342, 263-268 (2006).

[36] T. Caraballo, J. Real, A.M.Márquez, Three-dimensional system of globally modified Navier- Stokes equations with delay, Int. J. Bifurcation Chaos 20, 2869-2883 (2010).

[37] P. N. Seminario, T. Caraballo, T. F. Ma, *Well-posedness for the 3D-Navier-Stokes-Vlasov-Fokker-Planck equations with drag force with delay in a time-dependent domain.* (Sometido para publicación).

[38] M. Navier. Mémoire sur les lois du movement des fluides. Mém. de l'Acad. de Sci., 6:389-416, (1827).

[39] S. D. Poisson. Nouvelle Théorie de l'action capillaire. Ann. Phys., 101: 270-287, (1832).

[40] B. de Saint-Venant, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, vol. 17 (1843).

[41] G. G. Stokes. Mathematical Physical Papers, vol. 1 p. 225, Cambridge University Press (1880).

[42] S. A. Zorrilla. Introducción a la metodología de la investigación, México Océano: Aguilar, León y Cal 1988 [reimpresión 2007]. ISBN 968-493-040-2.

[43] E. Babbie. Fundamentos de la Investigación Social. Editorial Thompson Editores. México. 2000.

[44] C. Selltiz, M. Jahoda, M. Deutsch, et al. Métodos de investigación en las relaciones sociales. Ediciones Rialp, S.A., Madrid, 1965.

[45] R. Teman. Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis. Vol. 2 of Studies in mathematics and its applications, North-Holland Pub. Co., 1979.

[46] R, Adams. Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.

[47] H, Brezis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, New York, 2011.

[48] R. Aris. Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics. Dover, New York, 1990. ISBN-13 978-0486661100.

[49] G. K. Batchelor. An Introduction to Fluid Mechanics. Cambridge, 1994.

[50] R. B. Bird, W. E. Stweart, E. N. Lightfoot. Transport Phenomena. Wiley, New York, 1960.

[51] A. L. Coimbra. Mecânica dos Meios Cointínuos. Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1967.

[52] R. W. Fox, A. T. McDonald, P. J. Pritchard. Introdução à Mecânica dos Fluidos. LTC, Rio de Janeiro, 2006. ISBN-10: 8521614683.

[53] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. Fluid Mechanics. Pergamon, New York, 1959.

[54] W. H. Liepman, A. Roshko. Elements of Gas Dynamics. Wiley, New York, 1957.

[55] H. Schlichting, K. Gersten. Boundary Layer Theory. Springer, Berlin, 1999.

[56] F. M. White. Mecânica dos Fluidos. McGraw-Hill, Lisboa, 2002. ISBN: 868680424X.

[57] G. Lukaszewicz, P. Kalita. Navier-Stokes equations. An introduction with applications. Advances in Mechanics and Mathematics, 34. Springer, Cham, 2016. xiv+390 pp. ISBN: 978-3-319-27758-5; 978-3-319-27760-8.

[58] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, Berlin, 1983.

[59] A. Friedman. Partial Differential Equations. Holt, Rinehart and Winston, Austin, TX, 1969.

[60] A. Friedman. Foundations of Modern Analysis. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.

[61] V.C.L. Hutson, J.S. Pym. Applications of Functional Analysis and Operator Theory. Academic, London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco, 1980.

[62] L.A. Ljusternik, V.I. Sobolev. Elements of Functional Analysis. Hindustan Publishing Corporation, Delhi; Halstadt Press, New York, 1974.

[63] A. Kufner, O. John, S. Fucik. Function Spaces. Academia, Prague, 1977.

[64] Ch.B. Morrey. Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[65] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Vol II/B: Nonlinear Monotone Operators. Springer, New York, 1990.

[66] O.A. Ladyzhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, 2nd edn,Gordon and Breach, New York, 1969.

[67] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, Inequalities. Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[68] J.C. Robinson, Infinite-Dimensional Dynamical Systems. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[69] S. Childress. An Introduction to Theoretical Fluid Mechanics. Courant Institute of Mathematical Sciences, 2009.

[70] R. B. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. The Feynman Lectures on Physics, vol. 2. Addison–Wesley, 1964.

[71] L. Euler. Principes generaux du mouvement des fluides.Mémoires de L'Acad. des Sciences de Berlin, 11:274–315, 1757.